MEMORIE
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
DI TORINO

SERIE III, TOMO 1,
e dell'intiera collezione Tomo 112.

PARTE PRIMA:

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

TORINO
ACCADEMIA DELLE SCIENZE
1955

INDICE DELLA PARTE PRIMA

DEL TOMO I, SERIE III

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

[* Pagine dell'estratto e ** pagine del Tomo, poste in calce fra ()].

SOPRA UNA CLASSE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI NON LINEARI

Memoria di DOMENICO CALIGO (*)
presentata dal Socio corrisp. Mauro PICONE
nell'adunanza del 16 Gennaio 1952

Riassunto. — *Si espone un metodo per la integrazione delle equazioni differenziali, ordinarie omogenee del secondo e del terz'ordine a coefficienti costanti, applicandolo a quelle di second'ordine e di secondo grado. Per questa classe di equazioni si fa uno studio accurato delle singolarità degli integrali e si riportano numerosi esempi significativi.*

Sia $\Phi(x_0, x_1, ..., x_n)$ un polinomio omogeneo, a coefficienti costanti, nelle variabili $x_0, x_1, ..., x_n$.

Una equazione differenziale ordinaria del second'ordine a coefficienti (reali) costanti, omogenea e nella quale non compaia esplicitamente la variabile indipendente t:

$$\Phi(y'', y', y) = 0 \tag{I}$$

si può considerare — qualora si interpretino y'', y', y come coordinate cartesiane omogenee nel piano ($n = 2$) — l'equazione di una curva piana, e trasformare nell'equazione

$$\Phi(w, v, 1) = 0 ,$$

mediante le posizioni

$$w = \frac{y''}{y}, \quad v = \frac{y'}{y} .$$

Scegliendo opportunamente una rappresentazione parametrica di detta curva e imponendo l'identità

$$\frac{dv}{dt} \equiv w - v^2$$

si perviene ad una equazione differenziale del prim'ordine, a variabili separabili — avente il prescelto parametro come funzione incognita della

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Naz. per le Applicazioni del Calcolo.

variabile indipendente t — integrata la quale si risale facilmente (utilizzando la definizione di v) all'integrale generale della (I).

Analogamente le posizioni già citate per w e v e la

$$z = \frac{y'''}{y}$$

consentono di trasformare l'equazione differenziale omogenea del terzo ordine, a coefficienti costanti,

$$\text{(II)} \qquad \Phi(y''', y'', y', y) = 0 \,, \qquad (n = 3),$$

nell'equazione di una superficie dello spazio (z, w, v):

$$\Phi(z, w, v, 1) = 0 \;;$$

se si sceglie una opportuna rappresentazione parametrica della superficie e si impongono le identità

$$\frac{dv}{dt} \equiv w - v^2 \,, \qquad \frac{d(w - v^2)}{dt} \equiv z - 3wv + 2v^3 \,,$$

ci si riduce ad integrare un sistema differenziale di due equazioni del primo ordine, aventi per funzioni incognite di t i due parametri della rappresentazione predetta. Dalla conoscenza di questi parametri si risale poi al calcolo dell'integrale generale della (II).

Le precedenti osservazioni indicano un procedimento di integrazione per le equazioni del tipo (I) e (II), che risulta elegante e che riteniamo non ancora utilizzato.

Nella presente Memoria ne mostreremo una applicazione allo studio completo della equazione

$$\sum_{h,k}^{1 \dots 3} a_{hk} y^{(3-h)}(t) y^{(3-k)}(t) \equiv$$

$$\text{(1)} \qquad \equiv a_{11}y''^2 + 2a_{12}y''y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}y''y + 2a_{23}y'y + a_{33}y^2 = 0 \,,$$

$$\left(y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n} \,, \quad a_{hk} = a_{kh} \,, \text{ costanti reali}\right),$$

che classificheremo con il criterio consueto per le coniche.

La Memoria contiene anche un secondo metodo di integrazione della (1) (§ 4) [1], lo studio delle singolarità degli integrali di una equazione del

[1] Ricordiamo che, essendo la (1) omogenea e non comparendovi esplicitamente la variabile indipendente t, noto un suo integrale $Y(t)$, ne è integrale anche la funzione $c_1 Y(t + c_2)$, che può fornire l'integrale generale richiesto, tutte le volte che la (1) stessa sia effettivamente del second'ordine (ossia, finchè $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 > 0$).

prim'ordine dedotta dalla (1) (§ 5) e alcuni esempi ampiamente illustrativi del metodo adottato (§ 6).

Chiameremo A il determinante (simmetrico e reale) $\|a_{hk}\|$ dei coefficienti, A_{hk} il complemento algebrico di a_{hk} in A.

Classificheremo una equazione (1) secondo i seguenti casi e tipi:

$$\begin{array}{ll} A = 0, \text{ caso degenere,} \\ A \neq 0, \text{ caso regolare,} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A_{33} > 0, \text{ tipo ellittico,} \\ A_{33} < 0, \text{ tipo iperbolico,} \\ A_{33} = 0, \text{ tipo parabolico.} \end{array} \right.$$

1. — INTEGRALI DEL TIPO $y = e^{at}$.

a) Poniamo

$$f(a) \equiv a_{11}a^4 + 2a_{12}a^3 + (a_{22} + 2a_{13})a^2 + 2a_{23}a + a_{33}\,; \tag{2}$$

la (1) possiede integrali del tipo

$$y = e^{at}, \tag{3}$$

con a radice dell'equazione

$$f(a) = 0\,. \tag{4}$$

b) Se a_1 e a_2 sono due radici distinte di questa equazione, *condizione necessaria e sufficiente perchè la combinazione lineare*

$$y(t) = h_1 y_1(t) + h_2 y_2(t) \tag{5}$$

(con h_j = costanti arbitrarie non nulle; $y_j(t) = e^{a_j t}$; $j = 1, 2$) *di due integrali* (3) *della* (1) — *linearmente indipendenti* — *sia essa pure soluzione della* (1) *è che* a_1 *ed* a_2 *verifichino, oltre la* (4), *l'eguaglianza*

$$a_{11}a_1^2a_2^2 + a_{12}a_1a_2(a_1 + a_2) + a_{22}a_1a_2 + a_{13}(a_1^2 + a_2^2) + \\ + a_{23}(a_1 + a_2) + a_{33} = 0\,. \tag{6}$$

Poichè la (4) è a coefficienti reali le sue eventuali radici complesse sono due a due coniugate fra loro; tali radici potranno essere considerate da noi allora e allora soltanto che ogni coppia di coniugate verifichi anche la (6), scegliendo nella (5) le h_1 e h_2 complesse e coniugate; altrimenti terremo conto solo delle radici reali della (4).

c) In generale non è valida la nota proprietà delle equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti, per il caso in cui l'equazione caratteri-

stica possiede radici multiple (2); cioè — *se $\bar{a}$ è radice multipla di ordine μ* ($\mu = 2, 3, 4$) *della* (4), *il prodotto*

$$P_{\mu-1}(t) \cdot e^{\bar{a}t} \tag{7}$$

— *ove $P_{\mu-1}(t)$ indica un polinomio di grado $\mu - 1$ in t* — non *è in generale un integrale della* (1), *a meno che l'effettivo grado di $P_{\mu-1}(t)$ sia zero*. Registriamo il seguente risultato:

il polinomio $P_{\mu-1}(t)$, che compare nella (7), non può avere grado superiore al primo e — posto $P_{\mu-1}(t) = h_0 + h_1 t$, ($h_0$, h_1 costanti arbitrarie) — h_1 potrà essere diverso da zero allora e allora soltanto che sia $\bar{a}$ radice doppia di (4) e assuma uno dei seguenti valori:

$$\bar{a} = \frac{-a_{12} \mp \sqrt{-A_{33}}}{2a_{11}}, \text{ se } a_{11} \neq 0; \qquad \bar{a} = -\frac{a_{22}}{4a_{12}}, \text{ se } a_{11} = 0, \ a_{12} \neq 0;$$

$$\bar{a} = -\frac{a_{23}}{2a_{13}} = -\frac{a_{33}}{a_{23}}, \text{ se } a_{11} = a_{12} = 0, \ a_{22} = 0;$$

nei primi due casi, se fosse inoltre $a_{22} = 4a_{13}$, il valore indicato per $\bar{a}$ sarebbe addirittura radice tripla di (4). Al § 6, es. 11, mostreremo che esistono equazioni per le quali, essendo $\bar{a}$ radice doppia dell'equazione caratteristica, l'integrale generale è un polinomio di secondo grado moltiplicato per $e^{\bar{a}t}$.

2. — Il caso degenere: $A = 0$.

La (1) si può allora spezzare in due equazioni di primo grado; si ponga

$$\left.\begin{aligned} &(8) \quad v = \frac{y'}{y}, \quad w = \frac{y''}{y}, \quad c_j = -\frac{A_{j3}}{A_{33}}, \quad (j = 1, 2) \\ &(9) \quad X_1 = w + c_1, \quad X_2 = v + c_2 \end{aligned}\right\}, \text{ se } A_{33} \neq 0,$$

$$c = -\frac{A_{12}}{A_{22}}, \quad x = y'' + cy', \quad \text{se} \quad A_{33} = 0, \ A_{22} \neq 0; \tag{10}$$

allora:

a) *se* $A_{33} \neq 0$ il primo membro della (1) è la forma quadratica

$$\sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} X_h X_k \tag{11}$$

(il cui discriminante è A_{33}), che risulta definita se $A_{33} > 0$, nel qual caso la (1) ammette solo la soluzione nulla, a meno che non sia $c_1 = -c_2^2$ (e allora è: $y = he^{-c_2 t}$);

(2) La (4) non può essere propriamente chiamata equazione caratteristica della (1), perchè — come si vede facilmente (cfr. es. 2 al § 6) — equazioni (1) differenti possono procurare la medesima espressione (2) di $f(a)$.

b) *se* $A_{33} = 0$ *e* $A_{22} \neq 0$ [3] il primo membro della (1) è la forma quadratica

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}xy + a_{33}y^2 ,$$

che risulta definita se il suo discriminante A_{22} è positivo;

c) *se* $A_{33} < 0$, ovvero *se* $A_{33} = 0$ *e* $A_{22} < 0$, la decomposizione della (1) dà luogo a due distinte equazioni differenziali lineari del II ordine a coefficienti costanti, la cui trattazione è elementare [4];

d) *se* $A_{33} = A_{22} = 0$ *e* $A_{11} \neq 0$ [5], la (1) si riduce all'equazione del I ordine:

$$a_{22}y'^2 + 2a_{23}y'y + a_{33}y^2 = 0 ,$$

che ha soluzioni non identicamente nulle solo quando $A_{11} < 0$;

e) se infine $A_{33} = A_{22} = A_{11} = 0$, la caratteristica di A si abbassa ad uno e la (1) diviene

$$(a_{11}y'' + a_{12}y' + a_{13}y)^2 = 0 .$$

Riteniamo siano superflue altre considerazioni sul caso degenere.

3. — Riduzione a forma canonica e integrazione della (1) nel caso regolare ($A \neq 0$).

Escluderemo la soluzione $y \equiv 0$ e porremo, oltre alle (8),

$$p = \frac{dv}{dt} \equiv w - v^2 . \tag{12}$$

Si può considerare la (1) come l'equazione (nel piano $[w, v]$) della conica

$$a_{11}w^2 + 2a_{12}wv + a_{22}v^2 + 2a_{13}w + 2a_{23}v + a_{33} = 0 \tag{1'}$$

e si può ridurre la (1') in una delle tre forme canoniche, mediante una traslazione e una rotazione, la cui ampiezza φ è determinata dalla relazione

$$\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} ; \tag{13}$$

---

[3] Dall'ipotesi $A = A_{33} = 0$ segue $A_{13} = A_{23} = 0$.

[4] Ci limitiamo ad annotare che, nel caso $A_{33} < 0$, $a_{11} = 0$, la funzione $y = y_0 \cdot e^{-\frac{a_{13}}{a_{22}}(t-t_0)}$ è l'integrale particolare della (1) che soddisfa le condizioni iniziali $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = - c_2 y_0$, purchè sia

$$c_2 \left(= \frac{a_{13}}{a_{12}} \right) = \left[a_{22} \pm \sqrt{a_{22}^2 + 8a_{13}a_{22} - 16a_{12}a_{23}} \right] \frac{1}{4a_{12}} ,$$

altrimenti detta funzione è un integrale singolare della (1).

[5] Sono, in conseguenza delle ipotesi, $A_{13} = A_{23} = A_{12} = 0$, $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$.

la scelta di una opportuna rappresentazione parametrica consente di giungere abbastanza facilmente all'integrale generale. Conviene rilevare subito che

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0, \qquad \text{perchè} \qquad A \neq 0;$$

perciò la (13) ha sempre significato. Fra i valori di φ, che la soddisfano, basta considerare quelli verificanti le limitazioni

$$(14) \qquad \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi < \dfrac{\pi}{2}, \\ A \cdot \operatorname{sen} \varphi \geq 0. \end{cases}$$

Esaminiamo ora separatamente ciascuno dei tre tipi, supponendo (senza danno della generalità)

$$(15) \qquad a_{11} \geq 0.$$

a) Tipo ellittico: la (1') è un'ellisse a punti reali solo se $A < 0$, in conseguenza della ipotesi (15), dalla quale deve ora escludersi il segno « eguale »; per evitare ambiguità la (14) si precisa in

$$(14') \qquad \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi < 0 \\ A \cdot \operatorname{sen} \varphi > 0 \end{cases} \quad (^6);$$

perchè la (1) sia di tipo ellittico regolare e possieda integrali reali, non identicamente nulli, devono dunque essere verificate le condizioni:

$$(16) \qquad A < 0, \quad A_{33} > 0, \quad a_{11} > 0, \quad (a_{22} > 0).$$

Siano ϱ_1 e ϱ_2 le radici (reali e positive) dell'equazione

$$(17) \qquad \varrho^2 - (a_{11} + a_{22})\varrho + A_{33} = 0;$$

risulta dalle (13), (14') e (17):

$$a_{12} \cdot (\varrho_2 - \varrho_1) > 0, \qquad \text{se} \qquad a_{12} \neq 0,$$
$$\varrho_1 = a_{22}, \quad \varrho_2 = a_{11}, \qquad \text{se} \qquad a_{12} = 0, \quad \left(\varphi = -\frac{\pi}{2}\right).$$

Posto

$$(18) \qquad a^2 = -\frac{A}{\varrho_1 A_{33}}, \qquad b^2 = -\frac{A}{\varrho_2 A_{33}},$$

---

(6) Per il caso $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ (cerchio) si veda es. 9 al § 6.

si ottengono i semiassi a e b dell'ellisse (1'), la cui equazione assume la forma canonica

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1,$$

essendo (ξ, η) il nuovo sistema di riferimento dopo la traslasione (9) e la rotazione di ampiezza φ determinata dalle relazioni (13) e (14').

Mediante la rappresentazione parametrica $\xi = a \cos \vartheta(t)$, $\eta = b \operatorname{sen} \vartheta(t)$, si possono dedurre per w e v le equazioni

$$\text{(19)} \qquad \begin{cases} w = a \cos\varphi \cos\vartheta(t) - b \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta(t) - c_1 \\ v = a \operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta(t) + b \cos\varphi \operatorname{sen}\vartheta(t) - c_2, \end{cases}$$

per le quali ci siamo valsi delle posizioni (8), (13) e (18). Imponiamo ora la (12) (che è una identità): si ottiene l'equazione differenziale lineare del primo ordine nella funzione incognita $\vartheta(t)$, a variabili separabili:

$$\text{(20)} \qquad \begin{aligned} &[-a \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta(t) + b \cos\varphi \cos\vartheta(t)] \frac{d\vartheta}{dt} = \\ &= a \cos\varphi \cos\vartheta(t) - b \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta(t) - c_1 - \\ &- [a \operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta(t) + b \cos\varphi \operatorname{sen}\vartheta(t) - c_2]^2 . \end{aligned}$$

Integrata la (20) (7) si può ritenere noto anche l'integrale generale della (1), al quale si può pervenire — mediante una quadratura — dalla seconda delle (19),

$$\text{(21)} \qquad y(t) = k e^{\int v(t) dt}, \qquad (k \text{ costante})$$

ovvero — e il calcolo risulterà più facile — mediante le equazioni parametriche

$$\text{(22)} \qquad t = t(\vartheta), \qquad y = y(\vartheta),$$

la prima delle quali è conseguenza immediata della (20), la seconda è deducibile — mediante una quadratura — dalle (19) e (20), introducendole nella

$$\text{(23)} \qquad \frac{1}{y(\vartheta)} \frac{dy}{d\vartheta} = v \frac{dt}{d\vartheta}.$$

b) *Tipo iperbolico:* Valgono la (15) e le

$$\text{(24)} \qquad A \neq 0, \qquad A_{33} < 0 \quad (^8);$$

(7) L'esame delle singolarità sarà fatto al § 5.

(8) Se è $a_{11} = 0$, è anche $a_{12} \neq 0$.

la (14) si precisa in

$$(14'')\qquad \begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0\,, &\qquad \text{se} \quad A < 0\,. \\ 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}\,, &\qquad \text{se} \quad A > 0\,, \end{aligned}$$

Le due radici (reali, distinte e diverse da zero) della (17) sono ora di segno discorde; scelto ϱ_1 in modo che risulti

$$\begin{aligned} a_{12}\varrho_1 A > 0\,, &\qquad \text{se} \quad a_{12} \neq 0\,, \\ \varrho_1 A > 0\,, &\qquad \text{se} \quad a_{12} = 0\,, \end{aligned}$$

si ponga

$$(25)\qquad a^2 = \left|\frac{A}{\varrho_1 A_{33}}\right|, \qquad b^2 = \left|\frac{A}{\varrho_2 A_{33}}\right|;$$

con sviluppi, analoghi a quelli accennati in a), si ottiene la forma canonica della (1')

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = \varepsilon$$

con

$$\begin{aligned} \varepsilon = +1\,, &\qquad \text{se} \quad \varrho_1 A > 0\,, \\ \varepsilon = -1\,, &\qquad \text{se} \quad \varrho_1 A < 0\,. \end{aligned}$$

Supporremo che sia $\varrho_1 A > 0$: tramite la rappresentazione parametrica $\xi = aCh\vartheta(t)$, $\eta = bSh\vartheta(t)$, seguono le equazioni (9)

$$(26)\qquad \begin{cases} w = a\cos\varphi\, Ch\vartheta(t) - b\,\text{sen}\,\varphi\, Sh\vartheta(t) - c_1 \\ v = a\,\text{sen}\,\varphi\, Ch\vartheta(t) + b\cos\varphi\, Sh\vartheta(t) - c_2\,, \end{cases}$$

ove si è fatto ricorso alle posizioni (8) e (25), alla traslazione (9) e alla rotazione di ampiezza φ (cfr. (13) e (14'')).

L'identità (12) fornisce ora, in luogo della (20), l'equazione differenziale:

$$(27)\qquad \begin{aligned} &[a\,\text{sen}\,\varphi\, Sh\vartheta(t) + b\cos\varphi\, Ch\vartheta(t)]\,\frac{d\vartheta}{dt} = \\ &= a\cos\varphi\, Ch\vartheta(t) - b\,\text{sen}\,\varphi\, Sh\vartheta(t) - c_1 - \\ &- [a\,\text{sen}\,\varphi\, Ch\vartheta(t) + b\cos\varphi\, Sh\vartheta(t) - c_2]^2\,, \end{aligned}$$

dalla quale segue l'integrale generale nella forma (21) o nella forma (22) [10].

---

[9] Per una rappresentazione completa è necessario considerare tanto a e b positivi, quanto a e b negativi.

[10] Cfr. nota (7).

Se fosse $\varrho_1 A < 0$ basterebbe sostituire alla precedente rappresentazione parametrica la: $\xi = a Sh\vartheta(t)$, $\eta = b Ch\vartheta(t)$, per dedurre relazioni analoghe a quelle sopra considerate.

c) Tipo parabolico: la (15) e le condizioni $A \neq 0$, $A_{33} = 0$, richiedono che sia

$$a_{11} \cdot a_{22} \geqq 0\,, \quad A \cdot (a_{11} + a_{22}) < 0\,, \quad \begin{cases} a_{13} \cdot a_{22} \neq 0\,, & \text{se} \quad a_{11} = 0\,, \\ A < 0\,, \quad A_{23} \neq 0\,, & \text{se} \quad a_{11} > 0\,; \end{cases}$$

poichè, se $a_{11} \cdot a_{22} = 0$ anche $a_{12} = 0$, si può — salvo cambiare tutti i segni nella (1) — supporre sempre

$$A < 0\,, \quad A_{33} = 0\,, \quad a_{11} \cdot a_{22} \geqq 0\,, \quad a_{11} + a_{22} > 0 \quad (28)$$ [11].

Supporremo inoltre che sia $a_{12} \geqq 0$.

Una rotazione di ampiezza φ (cfr. (13) e (14)) e una traslazione conducono alla forma canonica della (1'):

$$(a_{11} + a_{22})\eta^2 + 2(a_{13} \cos\varphi + a_{23} \operatorname{sen}\varphi)\xi = 0 \quad (29)$$ [12];

questa equazione rappresenta ξ in funzione del parametro η, essendo da considerare $\eta = \eta(t)$. Le trasformazioni, sopra indicate, forniscono per w e v le equazioni

$$(30) \quad \begin{cases} w = \xi \cos\varphi - \eta \operatorname{sen}\varphi + \dfrac{1}{2A_{13}} \left[A_{11} + \left(\dfrac{A_{23}}{a_{11} + a_{22}} \right)^2 \right], \\ v = \xi \operatorname{sen}\varphi + \eta \cos\varphi - \dfrac{1}{2A_{23}} \left[A_{22} + \left(\dfrac{A_{13}}{a_{11} + a_{22}} \right)^2 \right]. \end{cases}$$ [13]

---

(11) Infatti: se $a_{11} = 0$ $(a_{12} = 0)$ è $A = -a_{22} a_{13}^2 \neq 0$. Si osservi pure che, se $a_{11} = a_{22} = 0\,(a_{12} = 0)$, la (1') diviene una retta e la (1) è di immediata risoluzione elementare (si torna al caso degenere).

(12) È: $|a_{13} \cos\varphi + a_{23} \operatorname{sen}\varphi| = \sqrt{\dfrac{-A}{a_{11}+a_{22}}}$; $\dfrac{1}{a_{13}\sqrt{a_{22}} - a_{23}\sqrt{a_{11}}} = \dfrac{\sqrt{a_{11}}}{A_{23}} = \dfrac{-\sqrt{a_{22}}}{A_{13}}$;

$(a_{12} = +\sqrt{a_{11} a_{22}})$.

(13) Si osservi che, per l'ipotesi $A_{33} = 0$ $(a_{11} a_{22} = a_{12}^2)$, segue:

1) se $a_{11} = 0$, allora $a_{12} = 0$, $a_{22} \neq 0$, $A_{13} = -a_{13} a_{22} \neq 0$, $A_{23} = 0$;

2) se $a_{22} = 0$, allora $a_{12} = 0$, $a_{11} \neq 0$, $A_{13} = 0$, $A_{23} = -a_{11} a_{23} \neq 0$;

3) se $a_{11} a_{22} \neq 0$, allora $a_{12} \neq 0$; A_{13} e A_{23} sono insieme nulli o entrambi diversi da zero (ma il primo caso porterebbe $A = 0$).

Perciò:

quando $A_{13} = 0$ (cioè $a_{22} = a_{12} = 0$) è $w = \eta + \dfrac{a_{13}}{a_{11}}$;

quando invece $A_{23} = 0$ (cioè $a_{11} = a_{12} = 0$) è $v = \eta - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}$.

Tenendo conto delle (29) e (30), l'identità (12) fornisce ora l'equazione differenziale del prim'ordine in $\eta(t)$:

$$(31) \qquad \left[-\frac{(a_{11}+a_{22})\operatorname{sen}\varphi}{a_{13}\cos\varphi + a_{23}\operatorname{sen}\varphi}\,\eta + \cos\varphi\right]\frac{d\eta}{dt} = w - v^2 .$$

Ricavata, con una integrazione [14], $\eta(t)$ dalla (31), si perviene allo integrale generale della (1) con un'integrazione ulteriore della seconda delle (30), oppure rappresentando detto integrale con equazioni parametriche aventi la forma (22) dopo la trasformazione (23), ove si legga η in luogo di ϑ.

Senza ripetere gli sviluppi diamo la relazione analoga alla (29) per il caso che — sussistendo le (28) con $a_{11}\cdot a_{22} > 0$ — sia $a_{12} < 0$:

$$(29') \qquad (a_{11}+a_{22})\xi^2 + 2(-a_{13}\operatorname{sen}\varphi + a_{23}\cos\varphi)\eta = 0 \quad [15];$$

sussistono le espressioni (30) per w e v, nelle quali si dovrà però considerare la η funzione di $\xi = \xi(t)$, secondo la (29').

L'ultima delle (30) e la (12) forniscono ora un'equazione differenziale del prim'ordine in $\xi(t)$, mediante la quale si giunge facilmente all'integrale generale della (1).

4. — Un secondo metodo di integrazione della (1) nel caso regolare ($A \neq 0$).

Ricordando le posizioni (2), (8), (12) si può porre la (1) nella forma

$$(32) \qquad F(v, p) \equiv a_{11}p^2 + 2(a_{11}v^2 + a_{12}v + a_{13})p + f(v) = 0;$$

il discriminante della (32) — considerata come un'equazione algebrica di II grado, rispetto a p — è il trinomio

$$(33) \qquad -[A_{33}v^2 - 2A_{23}v + A_{22}]$$

che analizzeremo al § 5 *a*).

La (32), risolta rispetto a p, fornisce $p = g(v)$, da cui — ricordando che $p = \dfrac{dv}{dt}$ — segue

$$(34) \qquad t = k + \int\frac{dv}{g(v)} \quad \text{(con } k \text{ costante arbitraria)};$$

---

[14] Cfr. nota [7].

[15] È:

$$|-a_{13}\operatorname{sen}\varphi + a_{23}\cos\varphi| = \sqrt{\frac{-A}{a_{11}+a_{22}}} \quad ; \quad \frac{1}{a_{13}\sqrt{a_{22}} + a_{23}\sqrt{a_{11}}} = \frac{-\sqrt{a_{11}}}{A_{23}} = \frac{-\sqrt{a_{22}}}{A_{13}} ;$$

$$(a_{12} = -\sqrt{a_{11}\cdot a_{22}}) .$$

Cfr. anche osservazione in nota [13].

ma, per la prima delle (8), $\frac{dy}{dt} = v \cdot y$ ovvero

$$\frac{dy}{dv} = vy \, \frac{dt}{dv}$$

cioè

$$\frac{dy}{y} = v \, \frac{1}{g(v)} \, dv$$

da cui

$$y = he^{\int \frac{vdv}{g(v)}}, \qquad (h, \text{ costante arbitraria}). \tag{35}$$

La (34) e la (35) forniscono l'integrale generale in funzione del parametro v, assumendo la funzione $g(v)$ espressioni fra loro diverse a seconda del tipo dell'equazione (1).

Questo metodo riesce molto vantaggioso se $a_{11} = 0$, perchè allora la (32) si abbassa di grado; ma è meno espressivo di quello esposto al § 3 ([16]), il quale — fra l'altro — permette di evitare il radicale, che compare in $g(v)$.

5. — Osservazioni circa le singolarità degli integrali.

a) A causa della (12), la (32) è una equazione differenziale, del I ordine, — nella funzione incognita $v(t)$ — nella quale non compare esplicitamente la variabile indipendente t. Poichè $v(t)$ è la derivata logaritmica di $y(t)$ (cfr. (8)), l'analisi degli integrali della (32) ha interesse anche ai fini del presente studio della (1).

([16]) Ci limitiamo a rilevare:

a) l'espressione di $g(v)$, se $a_{11} \neq 0$, è:

$$\frac{1}{a_{11}} \{-(a_{11}v^2 + a_{12}v + a_{13}) \pm \sqrt{-(A_{33}v^2 - 2A_{23}v + A_{22})}\};$$

b) se $a_{11} = 0$, la (33) diviene $(a_{12}v + a_{13})^2$;

c) se $a_{11} = 0$, $A = 0$, $a_{12} \neq 0$, la (32) si riduce all'equazione di Riccati:

$$p + v^2 + \frac{a_{22}}{2a_{12}} v + \frac{2a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}}{2a_{12}^2} = 0;$$

se infine $a_{11} = a_{12} = 0$, $a_{13} \neq 0$, $A \neq 0$, la (32) si riduce all'equazione di Riccati (cfr. (10)):

$$p + \left(1 + \frac{a_{22}}{2a_{13}}\right) v^2 + cv + \frac{a_{33}}{2a_{13}} = 0; \tag{32'}$$

d) la (32′), mediante la trasformazione $V = e^{\left(1 + \frac{a_{22}}{2a_{13}}\right)\int vdt}$, si muta in una equazione differenziale lineare del II ordine (cfr. ad es. G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale* (2ª ed., Bologna, 1949), parte I, cap. II, § 3, n. 2).

Se $a_{11} = 0$ tale equazione è lineare e si presenta nelle forme indicate in nota ([16]), commi c e d, per le quali non esistono singolarità ([17]), ovvero (caso $A \neq 0$, $a_{12} \neq 0$, dunque: tipo iperbolico regolare) nella forma

$$(36) \qquad p = \frac{-f(v)}{2a_{12}(v + c_2)},$$

$\left(\text{riducendosi } c_2 = \frac{a_{13}}{a_{12}}, \text{ — cfr. (8) —}\right)$, per la quale sono punti singolari (punti critici algebrici mobili ([17])) quelli della retta $v = -c_2$, nei quali ogni curva integrale della (36) — che vi passi — ha tangente normale all'asse t.

Sia $a_{11} \neq 0$: per la condizione (15) sarà $a_{11} > 0$.

Accanto alla (32) $F(v, p) = 0$ conviene considerare le seguenti sue derivate:

$$F_t \equiv \frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0, \qquad F_v \equiv \frac{\partial F}{\partial v} \equiv 2(2a_{11}v + a_{12})p + \frac{df}{dv},$$

$$F_p \equiv \frac{\partial F}{\partial p} \equiv 2[a_{11}p + (a_{11}v^2 + a_{12}v + a_{13})],$$

$$F_{vv} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \equiv 4a_{11}p + \frac{d^2 f}{dv^2}, \qquad F_{pp} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \equiv 2a_{11} > 0;$$

le radici comuni alle

$$(37) \qquad F = 0, \qquad F_p = 0$$

si ottengono annullando il p *-discriminante* dell'equazione (32):

$$(33') \qquad \Delta_p F \equiv 4a_{11}[A_{33}v^2 - 2A_{23}v + A_{22}]$$

il quale differisce solo per il fattore negativo « $-4a_{11}$ » dal trinomio (33); l'equazione

$$(33_0) \qquad A_{33}v^2 - 2A_{23}v + A_{22} = 0$$

è — nel piano (t, v) — quella della curva γ, *luogo del* p *-discriminante.*

([17]) Cfr. P. Boutroux, *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre* (Paris, 1908), cap. I, §§ I-II. Si noti che, nelle condizioni poste, è $f(-c_2) = \frac{A}{A_{33}} \neq 0$.

Perciò la curva γ può avere le seguenti configurazioni:

se $A_{33} \neq 0$:

1) una coppia di rette immaginarie coniugate, quando $A > 0$ ([18]),

2) una coppia di rette distinte e parallele $v = v_1$, $v = v_2$, quando $A < 0$ $(A_{33}v^2 - 2A_{23}v + A_{22} = A_{33}(v - v_1)(v - v_2))$,

3) una coppia di rette coincidenti, quando $A = 0 (v = - c_2)$;

se $A_{33} = 0$, ma $A_{23} \neq 0$, la (33_0) si abbassa al primo grado e il luogo è

4) la retta $v = \bar{\bar{v}} = \dfrac{A_{22}}{2A_{23}}$, $(A < 0)$;

se $A_{33} = A_{23} = 0$, la (33_0) è soddisfatta solo se anche $A_{22} = 0$ e lo è, in tal caso, identicamente (la (32) non ha, perciò, singolarità).

Se v_0 è una radice della (33_0), assoceremo a v_0 un valore t_0, di t, arbitrario e il valore p_0 (che si può ricavare per es. dalla $F_p(v_0, p) = 0$)

$$p_0 = - \frac{a_{11}v_0^2 + a_{12}v_0 + a_{13}}{a_{11}} \tag{38}$$

radice doppia dell'equazione $F(v_0, p) = 0$.

Risultati noti ([19]) sulle equazioni differenziali del prim'ordine consentono dunque di affermare quanto segue per gli integrali della (32):

Ad ogni punto (t_0, v_0) di γ è associato un elemento puntualmente singolare, ma la totalità di questi elementi non inviluppa, in generale, γ, cioè

a) γ *non è — in generale — un integrale singolare*; ma la (32) ammette l'integrale, passante per il punto (t_0, v_0) di γ

$$[v - v_0 - p_0(t - t_0)]^2 = C(t - t_0)^3 + \dots, \qquad (C \neq 0),$$

e perciò la curva integrale della (32), passante per (t_0, v_0), presenta ivi una cuspide, purchè sia inoltre

$$p_0 \cdot F_v(v_0, p_0) \neq 0 \qquad \text{(Teor. di Darboux-Cayley).} \tag{39'}$$

Un teorema di Cartan permette di precisare che — essendo, in queste ipotesi, nel punto $(t_0, v_0; p_0)$: $F = 0$, $F_p = 0$, $F_{pp} > 0$, $F_t + p_0 F_v \neq 0$ — la (32) non ammette in un intervallo $(t_0, t_0 + h)$, con h positivo, alcuna soluzione $v(t)$ continua insieme alla sua derivata prima, soddisfacente alle condizioni iniziali $t = t_0$, $v = v_0$, $\dfrac{dv}{dt} = p_0$; invece in un intervallo $(t_0 - h, t_0)$ — ove h è un numero positivo sufficientemente piccolo — ammette due soluzioni e due soltanto e le due curve integrali, che le rappresentano,

---

([18]) È utile osservare che il discriminante della (33_0) è $A_{23}^2 - A_{22}A_{33} = - a_{11}A$.

([19]) Cfr. G. Sansone, *op. cit.* in nota 16, parte II, cap. IX, § 2.

formano nel punto (t_0, v_0) una cuspide di prima specie e la tangente cuspidale non è parallela all'asse t (perchè $p_0 \neq 0$).

b) Se lungo la retta $v = v_0$ di γ valgono, con le (37), le

$$p_0 = 0\,, \quad F_v(v_0, p_0) \neq 0\,, \tag{39''}$$

cioè se $f(v)$ e $a_{11}v^2 + a_{12}v + a_{13}$ hanno la radice $v = v_0$ comune (e semplice per la $f(v)$) tale retta è un integrale singolare delle (32).

c) Se lungo una retta $v = v_0$ di γ valgono, con le (37), le

$$p_0 \neq 0\,, \quad F_v(v_0, p_0) = 0\,, \tag{39'''}$$

tale retta è una curva luogo di contatti, cioè da ogni punto (t, v) di essa partono due integrali distinti della (32), ivi tangenti, e la tangente comune non è parallela all'asse t.

d) Se infine, accanto alle (37), valgono le

$$p_0 = 0\,, \quad F_v(v_0, p_0) = 0\,, \tag{39''''}$$

cioè si soddisfa alle relazioni $f(v_0) = 0$, $f'(v_0) = 0$, $a_{11}v_0^2 + a_{12}v_0 + a_{13} = 0$, la retta $v = v_0$ di γ, è integrale singolare della (32).

e) La curva luogo dei punti di inflessione delle curve integrali della (32) si ottiene eliminando p fra le equazioni

$$F = 0\,, \quad F_v = 0\,, \quad (p \neq 0)\,;$$

dopo di ciò sono condizioni sufficienti per l'esistenza di un tal luogo:

$$F_p \neq 0\,, \quad F_{vv} \neq 0\,, \quad \left(\text{ossia } \frac{d^3v}{dt^3} \neq 0\right);$$

deve cioè essere

$$p = -\frac{f'(v)}{2(2a_{11}v + a_{12})}\,,$$

$$[(2a_{11}v + a_{12})^2 + A_{33}]\,[A_{33}v^2 - 2A_{23}v + A_{22}] = a_{11}A \tag{40}$$

e basta che, per i valori di v e p così ottenuti $\left(\text{e } v \text{ tale che } f'(v) \neq 0,\ v \neq -\frac{a_{12}}{2a_{11}}\right)$, sia

$$4a_{11}p + 4a_{11}v^2 + 4a_{12}v + 4a_{13} \neq 0\,, \qquad (\text{ossia } v \neq -c_2),$$
$$4a_{11}p + f''(v) \neq 0\,,$$

perchè esista la curva luogo suddetta [20].

---

[20] Osservare che, al contrario, per $A = 0$, $A_{33} \neq 0$ la (40) è soddisfatta dal valore, escluso, $v = -c_2$ e da $v = -\frac{a_{12}}{2a_{11}} \mp \frac{\sqrt{-A_{33}}}{2a_{11}}$; mentre, per $A_{33} = 0$, lo è da $v = 0$ e dal valore, escluso, $v = -\frac{a_{12}}{2a_{11}}$.

Al luogo appartengono anche le rette: $v = -\frac{a_{12}}{2a_{11}}$, se $f'\left(-\frac{a_{12}}{2a_{11}}\right) = 0$, $a_{11} \neq 0$; e $v = \alpha$, se α è radice doppia di $f(v) = 0$ (allora è $p = 0$).

β) Queste considerazioni acquistano maggior risalto se si riprendono i risultati del § 3. Con sviluppi elementari, che tralasceremo, si può infatti giungere alle seguenti conclusioni:

1) da ciascuna delle equazioni, ottenute eguagliando a zero il coefficiente di $\frac{d\vartheta}{dt}$ nella (20) [e (27)], si ricavano due valori di ϑ che, introdotti nella (19) [o (26)], forniscono i valori di v, radici della (33_0) [21];

2) analogamente dal primo membro della (31) si ha quel valore di η che, introdotto nella (30), fornisce l'unica radice $v = \bar{v}$ della (33_0) del tipo parabolico [22]; (cfr. α, 4).

3) i valori — costanti — di ϑ [o di η, o di ξ], che annullano i secondi membri delle (20) e (27) [della (31) e analoga], sono tali che per essi risulta

$$w - v^2 = 0\,,$$

ossia (cfr. (12)) $p = 0$; ma per $p = 0$ la (32) dà

$$f(v) = 0\,,$$

cioè a detti valori di ϑ [o η, o ξ] corrispondono valori di v, radici della (4); viceversa se (3) $y = e^{\alpha t}$, è $v = \alpha$, $w = \alpha^2$, perciò $w - v^2 = 0$.

Si può perciò affermare che «*gli integrali di tipo* (3) — *con* α *radice della* (4) — *sono integrali particolari della* (1) *se* $a_{11} = 0$, $a_{12} \neq 0$ [23]; *quando non sono integrali particolari della* (1), *sono di essa integrali singolari, se* $a_{11} \neq 0$».

Infatti, nel primo caso, la (32) si riduce alla $2(a_{12}v + a_{13})\frac{dv}{dt} = -f(v)$ e $v = \alpha$ soddisfa quest'ultima equazione senza annullare il coefficiente $a_{12}v + a_{13}$ (altrimenti sarebbe $A = 0$ (cfr. nota [16]), c); nel secondo caso,

---

[21] E precisamente

$$v = -c_2 \mp \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\,, \quad \text{se} \quad A_{33} > 0\,;$$

$$v = -c_2 \mp \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\varphi - b^2\cos^2\varphi}\,, \quad \text{se} \quad A_{33} < 0\,;$$

perciò — se $a_{11} = a_{22} = 0$ (iperbole equilatera) — quest'ultimo dà solo $v = -c_2$, (cfr. (36)).

[22] Si ottiene $\eta = \frac{a_{23}\operatorname{sen}\varphi + a_{13}\cos\varphi}{a_{11} + a_{22}} \operatorname{cotg}\varphi$, se $a_{12} \geqq 0$; analogamente, se $a_{12} < 0$:

$$\xi = \frac{a_{23}\cos\varphi - a_{13}\operatorname{sen}\varphi}{a_{11} + a_{22}} \operatorname{tang}\varphi\,.$$

[23] Cfr. P. APPELL, *Sur les invariants de quelques équations differentielles*, «Journal de Mathem.». S. IV, T. V (1889), pp. 361-423 (nn. 10-11).

per un valore α di v — che sia radice della (4) — il primo membro della (32) si decompone in $p[a_{11}p + 2(a_{11}\alpha^2 + a_{12}\alpha + a_{13})]$ cosicchè la retta $v = \alpha (p = 0)$ viene attraversata in ogni suo punto da curve integrali della (32) aventi ivi tangente di coefficiente angolare

$$p = -2 \frac{a_{11}\alpha^2 + a_{12}\alpha + a_{13}}{a_{11}}$$

che è zero solo se α coincide con una radice v_0 delle (33_0) (cfr. (38) e a, b).

D'altra parte, se $f(v) = 0$, si annulla una delle due determinazioni di $g(v)$ cfr. nota ([16]) e dalle (34) e (35) si può rilevare la singolarità degli integrali in tale circostanza.

6. — Alcuni esempi illustrativi.

Lo studio della (1) nel caso $a_{11} = 0$ può essere utilmente confrontato con quello più generale di E. L. Ince ([24]) per equazioni differenziali non lineari nel campo complesso.

Le equazioni considerate da questo Autore sono tutte, secondo la nostra classificazione, di tipo parabolico; a tale tipo si riferiscono anche le equazioni citate dal Kamke nella sua vasta raccolta ([25]) e tutti gli altri esempi, forniti negli ordinarii Corsi di Analisi, che abbiamo avuto occasione di conoscere.

Riteniamo bene di illustrare quanto abbiamo esposto nei numeri precedenti con alcuni esempi, che ci sembrano assai espressivi.

Per il caso degenere:

1) $$y''^2 - 2y''y' + 2y'y - y^2 = 0 \qquad \text{(tipo iperbolico)},$$

la sua equazione caratteristica $\alpha^4 - 2\alpha^3 + 2\alpha - 1 = 0$ ha la radice tripla $\alpha = 1$ e la radice semplice $\alpha = -1$; sono integrali

$$y = h_1 Ch t + h_2 Sh t, \qquad y = (k_1 + k_2 t)e^t \quad \text{ma } \textit{non} \text{ lo è } \quad t^2 e^t.$$

2) $$y''^2 + 5y''y' + 5y''y - 5y'y - 6y^2 = 0 \quad \text{e}$$
$$y''^2 + 5y''y' + 4y'^2 + y''y - 5y'y - 6y^2 = 0$$

sono entrambi di tipo iperbolico ed hanno la medesima equazione carat-

---

([24]) E. L. Ince, *Ordinary differential equations* (Londra, 1927); p. II, capp. XIII-XIV.

([25]) E. Kamke, *Differentialgleichungen,* I (Lipsia, 1942). Fanno eccezione solo le equazioni ivi catalogate: 6.62, ossia la $y'' = m\sqrt{y'^2 + ny^2}$, con $m \neq 0$, (cfr. es. 8), 6.230 e 6.241 (e limitatamente ad una proprietà invariantiva riportata dall'Appell; cfr. es. 5 e 6).

teristica $(\alpha^2 - 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3) = 0$; la prima si decompone nel prodotto $(y'' - y)(y'' + 5y' + 6y) = 0$ ed ha perciò solo gli integrali

$$y = h_1 Cht + h_2 Sht, \qquad y = e^{-\frac{5}{2}t}\left[k_1 Ch\frac{t}{2} + k_2 Sh\frac{t}{2}\right]$$

e nessuna altra combinazione di e^{-3t}, e^{-2t}, e^{-t}, e^t la soddisfa; la seconda si decompone in $(y'' + y' - 2y)(y'' + 4y' + 3y) = 0$ da cui

$$y = e^{-\frac{t}{2}}\left[h_1 Ch\frac{3t}{2} + h_2 Sh\frac{3t}{2}\right], \qquad y = e^{-2t}[k_1 Cht + k_2 Sht]$$

e non altre combinazioni.

3) $$y''^2 + 2y''y + 2y'^2 - 4y''y + 8y^2 = 0 \qquad \text{(tipo ellittico)}$$

ha l'equazione caratteristica $(\alpha + 2)^2(\alpha^2 - 2\alpha + 2) = 0$ ed è soddisfatta solo se lo sono simultaneamente $y'' - 4y = 0$ e $y' + 2y = 0$, ciò che avviene con $y = e^{-2t}$.

Per il caso regolare:

4) $$2y''y' - 6y''y + 8y^2 = 0 \qquad \text{(tipo iperbolico)};$$

è caratterizzata dai seguenti numeri:

$$A = -8, \quad A_{33} = -1, \quad a_{11} = a_{22} = 0, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4},$$
$$f(\alpha) = 2(\alpha + 1)(\alpha - 2)^2;$$

forma canonica:

$$\frac{\xi^2}{8} - \frac{\eta^2}{8} = 1, \qquad \begin{cases} w = \pm 2(Ch\vartheta + Sh\vartheta) \\ v = \pm 2(-Ch\vartheta + Sh\vartheta) + 3 \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} t = k + \log\left|\dfrac{v+1}{v-2}\right|^{\frac{4}{9}} - \dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{v-2}, \\ y = he^{-\frac{2}{3}\frac{1}{v-2}}\left[|v-2|^5 \cdot |v+1|^4\right]^{-\frac{1}{9}}; \end{cases}$$

sono integrali particolari e^{-t}, e^{2t}; l'equazione differenziale (cfr. (36))

$$p = -\frac{f(v)}{2(v-3)}$$

non ha l'integrale $v = 3$, mentre ha i due integrali particolari $v = -1$, $v = 2$; il luogo dei punti di inflessione delle sue curve integrali è spezzato nelle tre rette $v = 2$, $v = 2 \mp \sqrt{3}$.

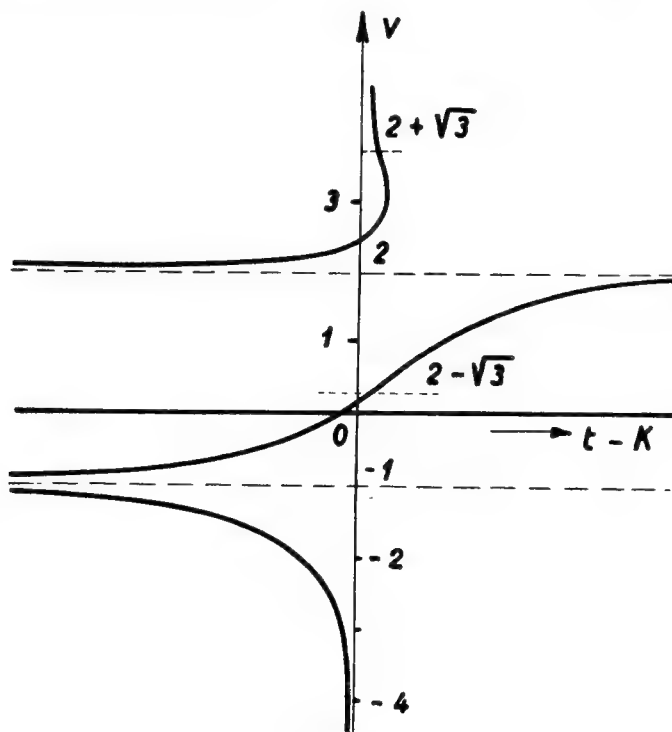



Fig. 1.

La fig. 1 rappresenta qualitativamente, un integrale $v(t)$ della (36)

5) $$y''^2 - 2y''y' + 3y'^2 - 4y''y + 2y'y = 0 \quad \text{(tipo ellittico)}:$$

$$A = -9, \quad A_{33} = 2, \quad a_{12} \neq 0, \quad \varphi = -\frac{3}{8}\pi, \quad f(a) = a(a^2-1)(a-2);$$

forma canonica:

$$\frac{\xi^2}{9\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}} + \frac{\eta^2}{9\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}} = 1,$$

$$\begin{cases} w = \dfrac{3}{4}(2-\sqrt{2})[\cos\vartheta + (3+2\sqrt{2})\,\text{sen}\,\vartheta] + \dfrac{5}{2}, \\ v = \dfrac{3}{4}\sqrt{2}\,[-\cos\vartheta + \text{sen}\,\vartheta] + \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$y(t) = h^2e^t + khe^{\frac{t}{2}} + \frac{9}{32}k^2 \quad (h,\ k,\ \text{costanti arbitrarie});$$

$$F(v, p) \equiv p^2 + 2(v^2 - v - 2)p + f(v), \quad \Delta_p F \equiv 8(v-2)(v+1);$$

a curva γ è formata dalle due rette (del piano (t, v)) $v = -1$, $v = 2$ e risulta curva integrale singolare dell'equazione $F = 0$ $\left(\text{i predetti valori di } v \text{ corrispondono a } \vartheta = -\frac{\pi}{4} \text{ e } \vartheta = 3\frac{\pi}{4}, \text{ radici di } \operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta = 0\right)$; il luogo dei punti di inflessione per gli integrali di $F = 0$ è costituito dalle due rette $v = \frac{1 \mp \sqrt{7}}{2}$ $\left(p = -\frac{1}{2}\right)$; appartiene al luogo anche $v = \frac{1}{2}$ $\left(p = \frac{9 \mp 6\sqrt{2}}{4}\right)$.

Qualitativamente un integrale $v(t)$ della (32) è rappresentato nella fig. 2.

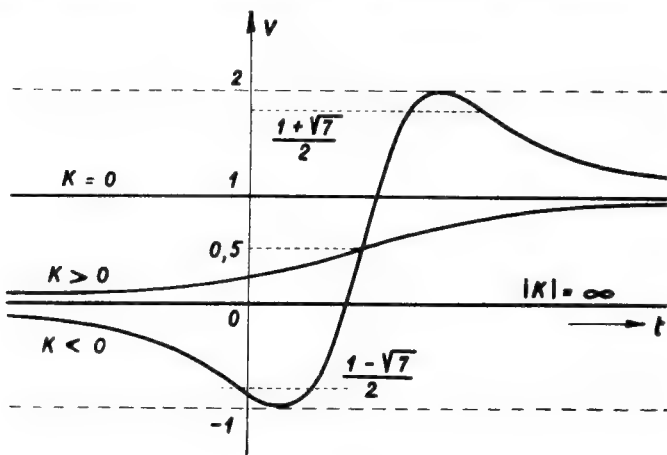



Fig. 2.

Si deduce che alle radici $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ di $f(\alpha) = 0$ corrispondono integrali particolari dell'equazione data, mentre alle $\alpha = -1$, $\alpha = 2$ corrispondono gli integrali singolari e^{-t}, e^{2t}. Nessuna loro combinazione è un integrale nel senso precisato al § 1, *b*.

6) $$y''^2 - 3y'^2 - 2y''y + 4y^2 = 0, \qquad \text{(tipo iperbolico):}$$

$$A = -9, \quad A_{33} = -3, \quad a_{11} \neq 0, \quad a_{12} = 0, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2},$$

$$f(\alpha) = (\alpha^2 - 4)(\alpha^2 - 1);$$

forma canonica:

$$\xi^2 - \frac{1}{3}\eta^2 = 1; \qquad \begin{cases} w = \pm\sqrt{3}\, Sh\vartheta + 1 \\ v = \mp\sqrt{3}\, Ch\vartheta \end{cases} \quad (^{26})$$

$$y(t) = -He^{-2t} + 3Ke^{2t} + 6\sqrt{|HK|}, \qquad (H, K \text{ costanti})$$

$$F(v, p) = p^2 + 2(v^2 - 1)p + f(v), \quad \Delta_p F \equiv -12(v^2 - 1);$$

(26) Qui, come anche nell'esempio 4, i doppi segni si corrispondono (cfr. nota (9)).

la curva γ è formata dalle rette $v = \pm 1$, che sono curve integrali singolari della $F = 0$; il luogo dei punti di inflessione è dato dalle rette

$$v = \mp \frac{\sqrt{7}}{2} \left(p = \frac{3}{4} \right).$$

Si deduce che alle radici $\alpha = -2$, $\alpha = 2$ della $f(\alpha) = 0$ corrispondono integrali particolari dell'equazione data, mentre alle $\alpha = -1$, $\alpha = 2$ corrispondono gli integrali singolari e^{-t}, e^{2t}. Nessuna loro combinazione è un integrale nel senso precisato al § 1, b ([27]).

7) $$2y''y' + 2\bar{v}y'^2 - 2\bar{v}y''y = 0 \quad (\bar{v} \neq 0), \quad \text{(tipo iperbolico)}:$$

$$A = -2\bar{v}^3 \neq 0, \quad A_{33} = -1, \quad a_{11} = 0, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{1}{\bar{v}}; \quad f(\alpha) = 2\alpha^3;$$

finchè resta imprecisato perfino il segno di $\bar{v}$ conviene applicare il metodo del § 4, in base al quale si ottiene

$$F(v, p) \equiv 2(v - \bar{v})p + 2v^3 = 0, \qquad p = -\frac{v^3}{v - \bar{v}}, \qquad \begin{cases} t = k + \dfrac{1}{v} - \dfrac{\bar{v}}{2v^2} \\ y = h \dfrac{e^{-\frac{\bar{v}}{v}}}{v}, \end{cases}$$

da cui

$$y(t) = hg(t)e^{-g(t)},$$

con $g(t) = 1 \pm \sqrt{-2\bar{v}(t-k)}$, h e k costanti arbitrarie; i punti della retta $v = \bar{v}$ sono punti critici mobili.

([27]) Il seguente teorema è dovuto all'Appell (op. cit. in ([23]), pp. 399, 404 e 416): «condizione necessaria e sufficiente perchè una equazione differenziale ordinaria del II ordine, omogenea (anche se a coefficienti variabili) $\Phi(y'', y', y) \equiv a_{11}y''^2 + 2a_{12}y''y' + \dots + a_{33}y^2 = 0$ abbia per integrale generale $y = h^2u_1 + hku_2 + k^2u_3$ (u_1, u_2, u_3 designando tre funzioni di t linearmente indipendenti, h e k delle costanti arbitrarie) è che esista una funzione μ di t, tale che l'espressione $\left(\frac{d\Phi}{dt}\right) - \mu\Phi$ sia scomponibile in un prodotto di fattori lineari rispetto ad y e alle sue derivate. Uno di questi fattori sarà lineare e omogeneo in y, y', y'', y''': uguagliandolo a zero si avrà una equazione lineare i cui integrali sono u_1, u_2, u_3; l'altro fattore sarà lineare e omogeneo in y, y', y'': eguagliandolo a zero si avrà una equazione lineare che fornisce degli integrali singolari della $\Phi = 0$».

Si vede subito che tale teorema è applicabile per l'es. 5, scegliendo $\mu = 1$, e per l'es. 6, con $\mu = 0$. In questo secondo caso si trova: $u_1 = e^{-2t}$, $u_2 =$ costante ($= M$), $u_3 = e^{2t}$ e si constata che, per verificare l'equazione, deve essere $M^2 = -12$; preferiamo perciò dare l'integrale generale nella nostra forma, dalla quale segue ugualmente la conclusione circa gli integrali particolari e quelli singolari della $\Phi = 0$.

8) $y''^2 - m^2 y'^2 - m^2 n y^2 = 0 \quad (m \cdot n \neq 0)$; cfr. nota ([25]), (tipo iperbolico):

$$A = m^4 n \neq 0, \quad A_{33} = -m^2 < 0, \quad a_{11} \neq 0, \quad a_{12} = 0,$$
$$f(\alpha) = \alpha^4 - m^2\alpha^2 - m^2 n;$$

indi segue, secondo che

$n < 0$,	$n > 0$,
$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}, \quad \dfrac{\xi^2}{-n} - \dfrac{\eta^2}{-nm^2} = 1;$	$\varphi = 0, \quad \dfrac{\xi^2}{nm^2} - \dfrac{\eta^2}{n} = 1;$
$\begin{cases} w = \pm m\sqrt{-n}\, Sh\vartheta, \\ v = \mp\sqrt{-n}\, Ch\vartheta, \end{cases}$	$\begin{cases} w = \pm m\sqrt{n}\, Ch\vartheta, \\ v = \pm\sqrt{n}\, Sh\vartheta, \end{cases}$
$Sh\vartheta \dfrac{d\vartheta}{dt} = -mSh\vartheta \mp \sqrt{-n}\, Ch^2\vartheta,$	$Ch\vartheta \dfrac{d\vartheta}{dt} = mCh\vartheta \mp \sqrt{n}\, Sh^2\vartheta,$

dalle quali gli integrali nella forma (21) o (22), calcolabili facilmente non appena sia precisato il valore di m ed n.

Poichè

$$F(v, p) \equiv p^2 + 2v^2 p + v^4 - m^2 v^2 - m^2 n, \quad \Delta_p F \equiv -4m^2(v^2 + n),$$

la curva γ è reale solo *se* $n < 0$ e — in tale ipotesi — si spezza nelle due rette $v = \mp\sqrt{-n}$ e risulta luogo di cuspidi delle curve integrali della $F = 0$, avendo la tangente cuspidale coefficiente angolare n (cioè $p_0 = n$); il luogo dei punti di inflessione è formato dalle due rette $v = \mp \dfrac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2}$, $\left(p = \dfrac{m^2}{4} + n,\ n < 0\right)$.

9) $y''^2 + y'^2 - m^2 y^2 = 0 \quad (m \neq 0)$, (tipo ellittico):

$$A = -m^2, \quad A_{33} = +1, \quad a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{12} = 0;$$

si può scegliere $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$, ovvero $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$, ma si hanno espressioni più semplici con il primo valore di φ;

$$f(\alpha) = \alpha^4 + \alpha^2 \quad m^2;$$

forma canonica:

$$\frac{\xi^2}{m^2} + \frac{\eta^2}{m^2} = 1, \quad \begin{cases} w = m \operatorname{sen}\vartheta = \dfrac{dv}{d\vartheta}, \\ v = -m\cos\vartheta, \end{cases}$$

indi gli integrali nella forma (21) o (22). Si ha ancora:

$$F(v, p) \equiv p^2 + 2v^2 p + v^4 + v^2 - m^2; \quad \Delta_p F \equiv 4(v^2 - m^2);$$

la curva γ si spezza nelle due rette

$$v_0 = \mp m, \ (p_0 = -m^2 \neq 0, \quad F_v(t_0, v_0; p_0) = \mp 2m \neq 0;$$

valgono dunque il teor. di Darboux-Cayley e quello di Cartan), ossia la γ è luogo di cuspidi, mentre il luogo dei punti di inflessione degli integrali della $F = 0$ è spezzato nelle rette

$$v = 0, \quad (p = \mp m), \qquad v = \mp \sqrt{m^2 - \frac{1}{4}}, \quad \left(p = -m^2 - \frac{1}{4}\right),$$

ciò che importa una discriminazione secondo che m^2 è maggiore di $\frac{1}{4}$ o non lo è.

10) $$6y'^2 - 2y''y - 6y'y + 2y^2 = 0 \qquad \text{(tipo parabolico)}:$$

$$A = -6, \quad A_{33} = 0, \quad a_{11} \cdot a_{22} = 0, \quad a_{11} + a_{22} = 6; \quad \varphi = 0;$$

$$f(\alpha) = 4(\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{2}\right);$$

forma canonica:

$$\xi = 3\eta^2, \qquad \begin{cases} w = \xi + \dfrac{1}{4} \\ v = \eta + \dfrac{1}{2} \end{cases}, \qquad y = he^{\frac{3}{4}t} \left| Sh \frac{t-k}{2} \right|^{-\frac{1}{2}}$$

e gli integrali particolari: $e^{\frac{1}{2}t}$, e^t (28).

Inoltre $F(v, p) \equiv -2p + 4v^2 - 6v + 2 = 0$ non ha singolarità; il luogo dei punti di inflessione è la retta $v = \frac{3}{4}\left(p = -\frac{1}{8}\right)$; l'andamento di un integrale $v(t)$ della $F = 0$ è indicato nella fig. 3.

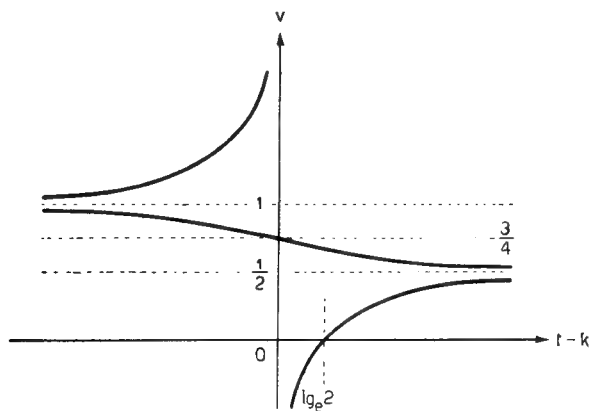



Fig. 3.

(28) Si constata facilmente, ad es., che $y = e^{\frac{1}{2}t}$ è un integrale particolare scrivendo l'integrale generale nella forma $y = H = e^{\frac{t}{2}} |1 - Ke^{-t}|^{-\frac{1}{2}}$ e ponendovi $H = 1$, $K = 0$.

11) $$ay'^2 - 2ay''y + 2\sqrt{ab}\,y'y - by^2 = 0, \qquad (a > 0,\ b > 0),$$

$$A = -a^3 < 0, \quad A_{33} = 0, \quad A_{13} = a^2 > 0, \quad A_{23} = 0; \qquad \varphi = 0;$$

$$\eta^2 - 2\xi = 0, \qquad \begin{cases} w = \xi - \dfrac{b}{a} \\ v = \eta - \sqrt{\dfrac{b}{a}} \end{cases}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{2}\left(\eta - 2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2;$$

l'integrale generale è $y = h(t-k)^2 e^{\sqrt{\frac{b}{a}}\,t}$ (cfr. § 1, c), mentre $y = e^{\sqrt{\frac{b}{a}}\,t}$ $\left(\text{ottenuto con } \bar{\alpha} = \sqrt{\frac{b}{a}}, \text{ radice doppia di } \frac{1}{a} f(\alpha) \equiv -\left(\alpha - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = 0\right)$ è un integrale particolare (per $h = 1$, $k = 0$); d'altra parte la mancanza di singolarità è confermata dal fatto che $F(v, p) \equiv -2ap + f(v) = 0$, ossia $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\left(v - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$, non ha singolarità (cfr. anche seguente es. 12).

Fra gli esempi catalogati dal Kamke ([29]), citeremo quelli indicati da lui con i numeri 6.129 e 6.164

12) $$ay'^2 + 2y''y + 2fy'y + gy^2 = 0, \qquad (a, f, g, \text{ costanti}),$$

13) $$y''y - \frac{n-1}{n}\,y'^2 = 0,$$

entrambi di tipo parabolico (degenere, se $a = 0$, ovvero se $n = 1$); la seconda (a cui possono ridursi le 6.125, 6.131, 6.138, 6.150, 6.157 e il primo membro della 6.156, eguagliato a zero) rientra, come ben si vede, nella prima (alla quale, inoltre, si confrontano agevolmente le 6.117, 6.118 e — purchè rese omogenee e considerate a coefficienti costanti — le 6.122, 6.139, 6.152).

L'equazione 12) è caratterizzata dai seguenti valori (supponiamo $a > 0$):

$$A = -a < 0, \quad A_{33} = 0, \quad a_{11} = a_{12} = 0, \quad a_{22} = a > 0; \quad \varphi = 0;$$

$$f(\alpha) = (a+2)\alpha^2 + 2f\alpha + g;$$

$$\xi = -\frac{a}{2}\eta^2; \qquad \begin{cases} w = \xi - \dfrac{ag - f^2}{2a}, \\ v = \eta - \dfrac{f}{a}. \end{cases}$$

([29]) Cfr. nota ([25]).

e l'equazione associata $F(v, p) \equiv 2p + f(v) = 0$ non ha singolarità; essa è una equazione di Riccati (cfr. (32')), che si muta nella

$$V'' + fV' + \frac{1}{2} g \left(1 + \frac{a}{2}\right) V = 0$$

mediante la trasformazione $V = e^{\left(\frac{1}{2} a + 1\right) \int v\, dt}$.

SULLE TRASFORMAZIONI PUNTUALI DI SECONDA E TERZA SPECIE FRA PIANI PROIETTIVI

Memoria di LUIGI MURACCHINI
presentata dal Socio nazionale residente Alessandro TERRACINI
nell'adunanza del 18 Febbraio 1953

Riassunto. — *Si studiano le trasformazioni puntuali di seconda e terza specie fra piani classificandole e determinandone gli invarianti proiettivi fondamentali. Se ne da poi in vari casi la costruzione geometrica.*

§ 1. - INTRODUZIONE.

1. - Uno dei primi lavori dedicati alla geometria proiettiva differenziale delle trasformazioni puntuali fra piani è l'importante Memoria di O. Boruwka, *Sur les correspondances analytiques entre deux plans projéctifs* (1). Tale lavoro, che contiene notevoli risultati, è stato giustamente messo in luce in successivi lavori del Villa (2). Nella prima parte di quella Memoria vengono introdotte le *direzioni caratteristiche* e vengono classificate le trasformazioni in tre specie, a seconda che, per la generica coppia regolare di punti corrispondenti, le predette direzioni sono tre distinte oppure due od una soltanto. Per le trasformazioni di prima specie, che costituiscono il tipo più generale, si ottiene un sistema completo di invarianti proiettivi. Nella seconda parte della Memoria vengono ottenuti diversi notevoli risultati sulle trasformazioni dei tre tipi, sui quali non occorre che qui mi soffermi. Tuttavia i risultati contenuti nella prima parte, relativi alle trasformazioni di seconda e terza specie, sono del tutto incompleti e parzialmente inesatti e ciò a causa di un errore di calcolo commesso in principio del

(1) « Publ. Univ. Masaryk », Brno; Première partie, N. 72 (1926); Deuxième partie, N. 85 (1927).

(2) Ricordo qui, fra altri, i seguenti lavori: M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali con direzioni caratteristiche coincidenti*, « Rend. Ist. Lombardo Sci. Lett. », 78 (1944-45), 321-328. M. VILLA, *Un fascio di quintiche collegato alle trasformazioni puntuali*, « Boll. Un. Mat. Ital. » 3 (3), 8-15 (1948).

lavoro. Se si confrontano infatti le formule (28) che si trovano a pagina 13 della prima parte del lavoro citato con le formule (9) che qui otteniamo nel n. 2, si constata che le formule del Boruwka valgono soltanto nell'ipotesi che le costanti $c_i (i = 0, 1, 2, 3)$ delle nostre formule abbiano i valori seguenti $c_0 = c_3 = 1$, $c_1 = c_2 = 0$, ipotesi che caratterizza le trasformazioni di prima specie (come risulta dalla nostra formula (7)). Non si possono dunque applicare le formule particolarizzate alle trasformazioni di seconda e terza specie, come invece fa il Boruwka da pagina 18 in poi del suo lavoro.

Oggetto del presente lavoro è quello di perfezionare e completare lo studio delle trasformazioni di seconda e terza specie, sempre seguendo i metodi e le vedute del Boruwka (3). Stabiliremo anzitutto alcune formule generali per le trasformazioni di qualsiasi specie e successivamente studieremo le trasformazioni di seconda specie e poi di terza specie. Naturalmente utilizzeremo, quando se ne presenti l'occasione, i risultati ottenuti per le trasformazioni puntuali dopo la pubblicazione del lavoro del Boruwka (4).

Riassumiamo ora i principali risultati contenuti nel presente lavoro.

Per le *trasformazioni di seconda specie* si trova che ve ne sono essenzialmente di tre tipi:

a) il tipo generale, dipendente da una funzione arbitraria di due variabili, per il quale le curve caratteristiche doppie non sono mai rette.

b) un secondo tipo (che si suddivide in tre sottotipi), dipendente da cinque funzioni arbitrarie di una variabile, per il quale le curve caratteristiche doppie sono rette.

c) le trasformazioni, dipendenti da una funzione arbitraria di una variabile, per le quali le curve caratteristiche doppie come pure quelle semplici sono rette di un fascio (in ciascun piano).

Per le *trasformazioni di terza specie* si trova pure che ve ne sono di tre tipi:

a) il tipo generale, dipendente da quattro funzioni arbitrarie di una variabile, per il quale le curve caratteristiche non sono rette.

---

(3) Tali metodi e vedute sono poi quelli dovuti ad E. CARTAN. Al proposito si veda il volume di questo A.: *Leçons sur la théorie des éspaces a connexion projective*, Paris, Ed. Gauthier-Villars (1937).

(4) Si vedano: L. FARINA, *Contributo allo studio delle trasformazioni puntuali fra due piani*, « Pont. Acad. Sc. Acta » 8 (1944), 19-28. G. CASADIO, *Sulle trasformazioni puntuali che hanno direzioni inflessionali passanti per punti fissi*, « Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. », (8) 2 (1947) 555-558. G. VAONA, *Sulle trasformazioni puntuali di 2ª e 3ª specie fra piani proiettivi*, « Atti IV Congr. Un. Mat. Ital. », Taormina 1951, Casa Ed. Perrella, Roma, 449-464 (1953). L. MURACCHINI, *Trasformazioni puntuali e loro curve caratteristiche*, « Atti IV Congr. Un. Mat. Ital. », Taormina 1951, Casa Ed. Perrella, Roma, 417-424 (1953).

b) un secondo tipo (che si suddivide in vari sottotipi) costituito dalle trasformazioni, dipendenti da tre funzioni di una variabile, aventi le curve caratteristiche rette.

c) le trasformazioni, dipendenti da una funzione arbitraria di una variabile, le cui curve caratteristiche sono in ciascun piano rette di un fascio, mentre la corrispondenza subordinata fra i due fasci è proiettiva.

2. - Considerati due piani proiettivi α, β (5), siano A, A_1, A_2 e B, B_1, B_2 due terne di punti analitici, di α e β rispettivamente, tali che sia

$$(A,\ A_1,\ A_2) = (B,\ B_1,\ B_2) = 1\,. \tag{1}$$

Assumeremo i punti delle due terne predette come vertici di triangoli di riferimento proiettivo in α e β. Valgono allora le solite formule (6) *di Frenet* per i due riferimenti

$$\begin{aligned} dA_i &= \omega_{i0}A + \omega_{i1}A_1 + \omega_{i2}A_2 \\ dB_i &= \tau_{i0}B + \tau_{i1}B_1 + \tau_{i2}B_2\,, \end{aligned} \tag{2}$$

dove $i = 0, 1, 2$ ed $A_0 \equiv A$, $B_0 \equiv B$. Scriveremo d'ora in poi, come si fa di solito, ω_1 per ω_{01} ed ω_2 per ω_{02} e così pure τ_1 per τ_{01}, τ_2 per τ_{02}. In virtù delle (1) si avrà

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = \tau_{00} + \tau_{11} + \tau_{22} = 0\,. \tag{3}$$

Supponiamo ora che fra i piani α, β interceda una corrispondenza analitica T e che i punti A, B si corrispondano in quella. Si vede facilmente che, se la coppia A, B è regolare (7), si può approfittare della arbitrarietà dei due riferimenti scelti, per far sì che si abbia

$$\omega_1 = \tau_1\,, \qquad \omega_2 = \tau_2\,. \tag{4}$$

Geometricamente la particolarizzazione dei riferimenti necessaria perchè valgano le (4) consiste nel prendere punti B, B_1, B_2 che siano corrispondenti dei punti A, A_1, A_2 in una delle ∞^2 *omografie tangenti* alla T nella

---

(5) Adopererò in questo lavoro, per quanto possibile, le notazioni del Boruwka nell'op. cit. in (1), Première partie.

(6) Per tutto ciò che si riferisce al calcolo esterno ed al metodo del *riferimento mobile*, che qui si adopera, vedasi l'op. cit. in (3).

(7) Cioè a Jacobiano non nullo. Per ciò che riguarda la interpretazione geometrica che segue vedasi: E. Čech, *Géometrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces*, «Cas. pro Pest. Mat. Fis.» 74, 75 (1950), 32-48, 123-136.

coppia A, B. Se poi, anzichè considerare una omografia tangente qualunque, si sceglie l'*omografia locale* (8) si avrà anche

$$\omega_{00} = \tau_{00} \tag{5}$$

e varranno le

$$\begin{aligned} \omega_{11} - \tau_{11} &= -c_1\omega_1 - c_2\omega_2 \\ \omega_{21} - \tau_{21} &= -c_2\omega_1 - c_3\omega_2 \\ \omega_{12} - \tau_{12} &= \quad c_0\omega_1 + c_1\omega_2 \\ \omega_{22} - \tau_{22} &= \quad c_1\omega_1 + c_2\omega_2 \end{aligned} \tag{6}$$

che si ottengono per differenziazione esterna dalle (4), tenendo conto delle *equazioni di struttura* (9) per le ω_{ij}, τ_{ij}. L'equazione delle direzioni caratteristiche per la coppia A, B è ora

$$c_0\omega_1^3 + 3c_1\omega_1^2\omega_2 + 3c_2\omega_1\omega_2^2 + c_3\omega_2^3 = 0\,. \tag{7}$$

La differenziazione esterna di (5) fornisce

$$[\omega_1(\omega_{10} - \tau_{10})] + [\omega_2(\omega_{20} - \tau_{20})] = 0\,,$$

se ne trae

$$\begin{aligned} \omega_{10} - \tau_{10} &= g_1\omega_1 + g\omega_2 \\ \omega_{20} - \tau_{20} &= g\omega_1 + g_2\omega_2\,. \end{aligned} \tag{8}$$

La differenziazione esterna delle (8), tenuto conto delle medesime e di tutte le precedenti, conduce alle relazioni (10)

$$\begin{aligned} dg_1 - 4g_1\omega_{11} - 2g_1\omega_{22} - 2g\omega_{12} - c_1\omega_{10} + c_0\omega_{20} &+ \\ + (2c_1g - c_2g_1 - c_0g_2)\omega_2 &= \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \\ dg - 3g\omega_{11} - 3g\omega_{22} - g_2\omega_{12} - g_1\omega_{21} - c_2\omega_{10} + c_1\omega_{20} &= \lambda_2\omega_1 + \lambda_3\omega_2 \\ dg_2 - 4g_2\omega_{22} - 2g_2\omega_{11} - 2g\omega_{21} - c_3\omega_{10} + c_2\omega_{20} + (c_3g_1 + c_1g_2 - 2c_2g)\omega_1 &= \\ = \lambda_3\omega_1 + \lambda_4\omega_2\,. \end{aligned} \tag{9}$$

---

(8) Per la caratterizzazione geometrica di quella omografia vedansi: G. FUBINI-E. ČECH, *Introduction a la géometrie projective différentielle des surfaces*, Chap. X, Paris, Ed. Gauthier-Villars (1931). M. VILLA, *Per una geometria proiettiva differenziale in grande delle trasformazioni puntuali*, « Atti IV Congr. Un. Mat. Ital. », Taormina 1951, Casa Ed. Perrella, Roma, 263-273 (1952).

(9) Vedasi l'op. cit. in (3). Le predette equazioni sono

$$[d\omega_{ij}] = [\omega_{i0}\omega_{0j}] + [\omega_{i1}\omega_{1j}] + [\omega_{i2}\omega_{2j}] \qquad (i, j = 0, 1, 2)$$

e le analoghe per le τ_{ij}.

(10) Ometterò sempre i calcoli, eseguibili senza alcuna difficoltà.

Analogamente operando sulle (6) si ottiene

$$
(10) \quad
\begin{aligned}
& dc_0 - 3c_0\omega_{11} - 3c_1\omega_{12} + g_1\omega_2 + 2(c_1^2 - c_0c_2)\omega_2 = a_0\omega_1 + a_1\omega_2 \\
& dc_1 - c_1\omega_{22} - 2c_1\omega_{11} - 2c_2\omega_{12} - c_0\omega_{21} + \frac{1}{2}(g + c_1c_2 - c_0c_3)\omega_2 = \\
& \qquad = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 \\
& dc_2 - c_2\omega_{11} - 2c_2\omega_{22} - 2c_1\omega_{21} - c_3\omega_{12} - \frac{1}{2}(g + c_1c_2 - c_0c_3)\omega_1 = \\
& \qquad = a_2\omega_1 + a_3\omega_2 \\
& dc_3 - 3c_3\omega_{22} - 3c_2\omega_{21} - g_2\omega_1 + 2(c_1c_3 - c_2^2)\omega_1 = a_3\omega_1 + a_4\omega_2 \,.
\end{aligned}
$$

Al solito indicheremo con δ un simbolo di differenziazione tale che risulti

$$\omega_1(\delta) = \omega_2(\delta) = 0$$

cioè ottenuto tenendo fissi i punti A, B e facendo variare soltanto i parametri da cui dipendono gli altri punti fondamentali dei riferimenti. Indicheremo poi con e_{ij}, t_{ij} ciò che diventano le ω_{ij}, τ_{ij} quando vi si utilizzi il simbolo δ anzichè l'ordinario simbolo di differenziazione d; sarà dunque $e_1 = e_2 = 0$ per definizione. L'introduzione dei precedenti simboli permette di rendersi conto immediatamente delle particolarizzazioni che subiscono i riferimenti successivamente. Attualmente si ha dalle (3), (4), (5), (6), (8)

$$
(11) \quad
\begin{aligned}
& t_1 = t_2 = 0 \,, \quad t_{00} + t_{11} + t_{22} = e_{00} + e_{11} + e_{22} = 0 \\
& t_{00} = e_{00} \\
& t_{ij} = e_{ij} \qquad\qquad (i, j = 1, 2) \\
& t_{i0} = e_{i0} \qquad\qquad (i = 1, 2)
\end{aligned}
$$

e si vede così il riferimento relativo al piano β (formato dai punti B, B_1, B_2) è ora legato a quello relativo al piano α, sicchè si dispone dei punti A_1, A_2 e del punto unità $A + A_1 + A_2$.

Per poter rendersi conto del significato geometrico delle particolarizzazioni dei sistemi di riferimento che faremo in seguito conviene stabilire alcune formule che forniscono le relazioni fra le forme ω_{ij}, τ_{ij} e gli sviluppi locali delle coordinate ξ, η (proiettive non omogenee) di B in funzione di quelle di A, x, y. Siano questi ultimi

$$
(12) \quad
\begin{aligned}
\xi &= x + \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j \\
\eta &= y + \sum_{i,j} b_{ij}x^i y^j
\end{aligned}
$$

si trova allora [11] in primo luogo

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
a_{20} &= \frac{1}{2} c_1 , & a_{11} &= c_2 , & a_{02} &= \frac{1}{2} c_3 \\
b_{20} &= -\frac{1}{2} c_0 , & b_{11} &= - c_1 , & b_{02} &= -\frac{1}{2} c_2
\end{aligned}
$$

e poi

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
6a_{30}\omega_1 + 2a_{21}\omega_2 &= dc_1 - 2c_1\omega_{11} - c_1\omega_{22} - c_0\omega_{21} - 2c_2\omega_{12} + \\
&\quad + (c_1^2 - c_0c_2)\omega_1 + (c_1c_2 - c_0c_3)\omega_2 + 2(\omega_{10} - \tau_{10}) , \\
2a_{21}\omega_1 + 2a_{12}\omega_2 &= dc_2 - 2c_2\omega_{22} - c_2\omega_{11} - c_3\omega_{12} - 2c_1\omega_{21} + \\
&\quad + (c_2^2 - c_1c_3)\omega_2 + \omega_{20} - \tau_{20} , \\
2a_{12}\omega_1 + 6a_{03}\omega_1 &= dc_3 - 3c_3\omega_{22} - 3c_2\omega_{21} + (c_1c_3 - c_2^2)\omega_1 , \\
-6b_{30}\omega_1 - 2b_{21}\omega_2 &= dc_0 - 3c_0\omega_{11} - 3c_1\omega_{12} + (c_1^2 - c_0c_2)\omega_2 , \\
-2b_{21}\omega_1 - 2b_{12}\omega_2 &= dc_1 - 2c_1\omega_{11} - c_1\omega_{22} - 2c_2\omega_{12} - c_0\omega_{21} + \\
&\quad + (c_2c_0 - c_1^2)\omega_1 + \tau_{10} - \omega_{10} , \\
-2b_{12}\omega_1 - 6b_{03}\omega_2 &= dc_2 - 2c_2\omega_{22} - c_2\omega_{11} - c_3\omega_{12} - 2c_1\omega_{21} + \\
&\quad + (c_0c_3 - c_1c_2)\omega_1 + (c_1c_3 - c_2^2)\omega_2 + 2(\tau_{20} - \omega_{20}) .
\end{aligned}
$$

Le precedenti relazioni forniscono i coefficienti degli sviluppi (12) fino al terzo ordine; questi saranno sufficienti per il seguito.

§ 2. - Trasformazioni di seconda specie.

3. - Consideriamo nel presente paragrafo le trasformazioni che, nella generica coppia regolare di punti corrispondenti, hanno soltanto due direzioni caratteristiche distinte, una delle quali dovendosi considerare doppia.

---

[11] A queste relazioni si perviene con un metodo da me già adoperato per le trasformazioni di prima specie nel lavoro: *Sulla deformazione proiettiva delle trasformazioni puntuali*, « Boll. Un. Mat. Ital. », 3 (7), 29-38 (1952), al quale rimando per ulteriori chiarimenti. Vi si perviene alla formula seguente

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\{-\omega_1 + x(\omega_{00} - \omega_{11}) - y\omega_{21} + x^2\omega_{10} + xy\omega_{20}\} + \\
&+ \frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\{-\omega_2 - x\omega_{12} + y(\omega_{00} - \omega_{22}) + xy\omega_{10} + y^2\omega_{20}\} + \\
&+ d_0\xi + \tau_1 + \xi(\tau_{11} - \tau_{00}) + \eta\tau_{21} - \xi^2\tau_{10} - \xi\eta\tau_{20} \equiv 0
\end{aligned}
$$

e ad un'altra analoga per la η, nelle quali $d_0\xi$, $d_0\eta$ indica differenziazione eseguita soltanto sui coefficienti a_{ij}, b_{ij}. La identificazione allo zero dei primi membri permette di determinare successivamente tutti i predetti coefficienti espressi mediante le forme ω_{ij}, τ_{ij}.

Chiameremo *caratteristiche doppie* o *semplici*, rispettivamente, le curve (di ciascuno dei piani α, β) la cui tangente generica ha direzione caratteristica doppia o semplice.

Assumiamo la direzione caratteristica doppia come direzione $\omega_1 = 0$ e l'altra come direzione $\omega_2 = 0$, il che equivale a fare $c_0 = c_2 = c_3 = 0$, inoltre facciamo sì che sia $c_1 = 1$. Tutto ciò è possibile, come risulta dalle (10), e ne seguono le relazioni (conseguenze delle (10) stesse e della (9))

$$(15)\quad \begin{aligned} -3\omega_{12} + g_1\omega_2 + 2\omega_2 &= a_0\omega_1 + a_1\omega_2 \\ -\omega_{22} - 2\omega_{11} + \frac{1}{2}g\omega_2 &= a_1\omega_1 + a_2\omega_2 \\ -2\omega_{21} - \frac{1}{2}g\omega_1 \qquad &= a_2\omega_1 + a_3\omega_2 \\ -g_2\omega_1 \qquad &= a_3\omega_1 + a_4\omega_2 \end{aligned}$$

$$(15')\quad \begin{aligned} dg_1 - 4g_1\omega_{11} - 2g_1\omega_{22} - 2g\omega_{12} - \omega_{10} + 2g\omega_2 &= \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \\ dg - 3g\omega_{11} - 3g\omega_{22} - g_2\omega_{12} - g_1\omega_{21} + \omega_{20} &= \lambda_2\omega_1 + \lambda_3\omega_2 \\ dg_2 - 4g_2\omega_{22} - 2g_2\omega_{11} - 2g\omega_{21} + g_2\omega_1 &= \lambda_3\omega_1 + \lambda_4\omega_2 \,. \end{aligned}$$

Se ne ricava poi

$$e_{12} = e_{21} = 0$$

$$-e_{22} = 2e_{11}\,, \qquad e_{00} = e_{11}$$

$$(16)\quad \begin{aligned} \delta g_1 - 4g_1e_{11} - 2g_1e_{22} - e_{10} &= 0 \\ \delta g - 3ge_{11} - 3ge_{22} + e_{20} &= 0 \\ \delta g_2 - 4g_2e_{22} - 2g_2e_{11} &= 0\,. \end{aligned}$$

L'ultima delle (16) mostra che [12] g_2 è un invariante relativo che può essere o meno nullo. Supporremo in primo luogo che sia $g_2 \neq 0$ e questo, come vedremo, è il caso generale.

4. - Nella ipotesi $g_2 \neq 0$, la ultima delle (16) mostra che si può far sì che sia $g_2 = 1$, allora si ha dalla stessa

$$2e_{22} + e_{11} = 0$$

e quindi, per le precedenti relazioni, $e_{11} = e_{22} = 0$. Si ha allora

$$(17)\quad \delta g_1 - e_{10} = 0\,, \quad \delta g + e_{20} = 0$$

dalle quali risulta che si può far sì che sia $g = g_1 = 0$.

---

[12] Perchè, avendosi $g_2 + \delta g_2 = (1 + 4e_{22} + 2e_{11})g_2$, un cambiamento del riferimento in ciascun piano (che, naturalmente, tenga fissi A, B) non fa che alterare g_2 per un fattore non nullo.

Tenuto conto di tutto quanto precede si ha ora

$$(18)\quad \begin{aligned} -3\omega_{12}+2\omega_2 &= a_0\omega_1+a_1\omega_2\\ -\omega_{22}-2\omega_{11} &= a_1\omega_1+a_2\omega_2\\ -2\omega_{21} &= a_2\omega_1-\omega_2\\ -\omega_{10} &= \lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2\\ -\omega_{12}+\omega_{20} &= \lambda_2\omega_1+\lambda_3\omega_2\\ -4\omega_{22}-2\omega_{11} &= \lambda_3\omega_1+\lambda_4\omega_2-\omega_1\,, \end{aligned}$$

$$e_{11}=e_{22}=e_{00}=e_{12}=e_{21}=e_{10}=e_{20}=0$$

queste ultime mostrano che il riferimento è ora del tutto fissato, intrinsecamente associato alla trasformazione. Le (18) forniscono, dopo aver fatto posizioni manifeste,

$$(19)\quad \begin{aligned} \omega_{00} &= (h+l)\omega_1+(k+m)\omega_2\\ \omega_{11} &= (h-2l)\omega_1+(k-2m)\omega_2\\ \omega_{22} &= (l-2h)\omega_1+(m-2k)\omega_2\\ \omega_{21} &= -\frac{3}{2}m\omega_1+\frac{1}{2}\omega_2\\ \omega_{12} &= n\omega_1+\left(\frac{2}{3}-l\right)\omega\\ \omega_{10} &= p\omega_1+q\omega_2\\ \omega_{20} &= (n-q)\omega_1+\left(6h-l+\frac{5}{3}\right)\omega_2\,, \end{aligned}$$

da queste, per differenziazione esterna, si ottengono sei condizioni di integrabilità per i sette *invarianti fondamentali* h, k, l, m, n, p, q. Tali condizion non verranno qui utilizzate e pertanto le ometto. Gli sviluppi locali ([13]) per questo tipo di trasformazione sono, fino ai termini del terzo ordine,

$$(20)\quad \begin{aligned} \xi &= x+\frac{1}{2}x^2+\frac{3l+1}{6}x^3+\frac{3}{2}mx^2y+[4]\\ \eta &= y-xy+\frac{n}{2}x^3+\frac{1-3l}{2}x^2y-\frac{3}{2}mxy^2+\frac{1}{2}y^3+[4]\,. \end{aligned}$$

Osserviamo che, in virtù della quarta fra le (19), *le caratteristiche doppie non possono mai essere, nel caso presente, rette.* Infine si osservi che

([13]) Da quegli sviluppi locali risulta che le direzioni caratteristiche doppie sono inflessionali di 2ª specie (cioè conservano i flessi di 2ª specie e non di 1ª specie soltanto). Ciò era stato rilevato, in altro modo, da G. VAONA nell'op. cit. in ([4]).

dalle condizioni di integrabilità di cui ho detto poco sopra si deduce facilmente che *le trasformazioni di cui si tratta dipendono da una funzione arbitraria di due variabili.*

5. - Passiamo alla considerazione del caso $g_2 = 0$. Anche in questo caso si ha dalle prime due fra le (16) che si può far sì che sia $g = g_1 = 0$; allora le (15), (15') e le (16) stesse forniscono

$$\begin{gathered} e_{22} = -2e_{11} = -2e_{00}\,, \qquad e_{21} = e_{12} = e_{10} = e_{20} = 0 \\ -3\omega_{12} + 2\omega_2 = a_0\omega_1 + a_1\omega_2 \\ -\omega_{22} - 2\omega_{11} = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 \\ -2\omega_{21} = a_2\omega_1 \\ -\omega_{10} = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \\ \omega_{20} = \lambda_2\omega_1 \end{gathered}$$

e queste, dopo manifeste posizioni, si scrivono

$$\begin{aligned} \omega_{11} - \omega_{00} &= (3m-2)\omega_1 + 2l\omega_2 \\ \omega_{21} &= l\omega_1 \\ \omega_{12} &= n\omega_1 + m\omega_2 \\ \omega_{10} &= h\omega_1 + k\omega_2 \\ \omega_{20} &= -k\omega_1\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Il riferimento non è ancora fissato; per fissarlo consideriamo le relazioni che si ottengono per differenziazione esterna dalle (21),

$$\begin{aligned} &3[dm\omega_1] + 2[dl\omega_2] + 2l[\omega_2(\omega_{22} - \omega_{00})] + \{6lm + 3k - 2l\}[\omega_1\omega_2] = 0 \\ &[dl\omega_1] + l[\omega_1(\omega_{22} - \omega_{00})] - l^2[\omega_1\omega_2] = 0 \\ &[dn\omega_1] + [dm\omega_2] - n[\omega_1(\omega_{22} - \omega_{00})] + \{3ln - 2m^2 + 2m - h\}[\omega_1\omega_2] = 0 \\ &[dh\omega_1] + [dk\omega_2] + k[\omega_2(\omega_{22} - \omega_{00})] + \{3lh - 3mk + 2k\}[\omega_1\omega_2] = 0 \\ &[dk\omega_1] + k[\omega_1(\omega_{22} - \omega_{00})] + 2kl[\omega_1\omega_2] = 0, \end{aligned} \tag{22}$$

queste portano di conseguenza alle

$$\begin{aligned} dh &= \gamma_0\omega_1 + \beta_0\omega_2 \\ dk - k(\omega_{22} - \omega_{00}) &= \gamma_1\omega_1 + 2kl\omega_2 \\ dl - l(\omega_{22} - \omega_{00}) &= \gamma_2\omega_1 - l^2\omega_2 \\ dm &= \gamma_3\omega_1 + \beta_3\omega_2 \\ dn + n(\omega_{22} - \omega_{00}) &= \gamma_4\omega_1 + \beta_4\omega_2\,, \end{aligned} \tag{23}$$

con

$$\begin{aligned} \gamma_1 - \beta_0 &= 3mk - 3lh - 2k \\ 2\gamma_2 - 3\beta_3 &= 2l - 3k - 6lm \\ \gamma_3 - \beta_4 &= 2m^2 - 3ln - 2m + h\,. \end{aligned} \tag{23'}$$

Pertanto si ha

$$\begin{aligned}(24)\qquad &\delta h = \delta m = 0\,, \qquad \delta n + n(e_{22} - e_{00}) = 0\,,\\ &\delta k - k(e_{22} - e_{00}) = 0\,, \qquad \delta l - l(e_{22} - e_{00}) = 0\,,\end{aligned}$$

se ne deduce che h ed m sono invarianti assoluti mentre k, l, n sono degli invarianti relativi. Occorrerà dunque distinguere i casi in cui uno almeno dei tre k, l, n è diverso dallo zero, dal caso in cui si abbia $k = l = n = 0$. Esaminiamo anzitutto la prima ipotesi; si possono distinguere tre casi, supponendo rispettivamente che sia $k \neq 0$, oppure $l \neq 0$, o infine $n \neq 0$ ([14]). I tre casi danno luogo ad una trattazione analoga: dalle (24) si vede dapprima che quello dei tre invarianti relativi, che si è supposto diverso dallo zero, si può rendere eguale ad 1. Il riferimento rimane allora fissato e tutte le forme ω_{ij} risultano espresse per mezzo delle ω_1, ω_2. Omettendo i semplici calcoli riportiamo qui i risultati cui si perviene:

$k = 1$). Si ha allora

$$(25)\qquad \begin{aligned}
&\omega_{00} = \frac{1}{3}(\gamma_1 - 3m + 2)\,\omega_1\,, && dh = \gamma_0\omega_1 + (\gamma_1 - 3m + 3lh + 2)\,\omega_2\,,\\
&\omega_{11} = \frac{1}{3}(\gamma_1 + 6m - 4)\,\omega_1 + 2l\omega_2\,, && dl = (\gamma_2 - \gamma_1 l)\,\omega_1 - 3l^2\omega_2\,,\\
&\omega_{21} = l\omega_1\,, && dm = \gamma_3\omega_1 + \beta_3\omega_2\,,\\
&\omega_{12} = n\omega_1 + m\omega_2\,, && dn = (\gamma_4 + n\gamma_1)\,\omega_1 + (\beta_4 + 2ln)\,\omega_2\,,\\
&\omega_{10} = h\omega_1 + \omega_2\,, && 2\gamma_2 - 3\beta_3 = 2l - 6lm - 3\,,\\
&\omega_{20} = -\,\omega_1\,, && \gamma_3 - \beta_4 = 2m^2 - 3ln - 2m + h.
\end{aligned}$$

$l = 1$)

$$(26)\qquad \begin{aligned}
&\omega_{00} = \frac{1}{3}(\gamma_2 - 3m + 2)\,\omega_1 - \omega_2\,, && dh = \gamma_0\omega_1 + (\gamma_1 - 3mk + 3h + 2k)\omega_2\,,\\
&\omega_{11} = \frac{1}{3}(\gamma_2 + 6m - 4)\,\omega_1 + \omega_2\,, && dm = \gamma_3\omega_1 + \beta_3\omega_2\,,\\
&\omega_{21} = \omega_1\,, && dk = (\gamma_1 - k\gamma_2)\,\omega_1 + 3k\omega_2\,,\\
&\omega_{12} = n\omega_1 + m\omega_2\,, && dn = (\gamma_4 + n\gamma_2)\,\omega_1 + (\beta_4 - n)\,\omega_2\,,\\
&\omega_{10} = h\omega_1 + k\omega_2\,, && 2\gamma_2 - 3\beta_3 = 2 - 3k - 6m\,,\\
&\omega_{20} = -\,k\omega_1\,, && \gamma_3 - \beta_4 = 2m^2 - 3n - 2m + h\,.
\end{aligned}$$

([14]) In ciascuno di quei tre casi non facciamo ipotesi che su una sola delle tre quantità k, l, n.

$n = 1)$

$$
(27)\quad
\begin{aligned}
&\omega_{00} = \frac{1}{3}(2-\gamma_4-3m)\,\omega_1 - (\beta_4+2l)\,\omega_2\,, && dh = \gamma_0\,\omega_1 + (\gamma_1 - 3mk - 3lh - 2k)\,\omega_2\,,\\
&\omega_{11} = \frac{1}{3}(6m-\gamma_4-4)\,\omega_1 - \beta_4\,\omega_2\,, && dk = (\gamma_1 + k\gamma_4)\,\omega_1 + (2kl + k\beta_4)\,\omega_2\,,\\
&\omega_{21} = l\,\omega_1\,, && dl = (\gamma_2 + l\gamma_4)\,\omega_1 + (l\beta_4 - l^2)\,\omega_2\,,\\
&\omega_{12} = \omega_1 + m\,\omega_2\,, && dm = \gamma_3\,\omega_1 + \beta_4\,\omega_2\,,\\
&\omega_{10} = h\,\omega_1 + k\,\omega_2\,, && 2\gamma_2 - 3\beta_3 = 2l - 3k - 6lm\,,\\
&\omega_{20} = -k\,\omega_2\,, && \gamma_3 - \beta_4 = 2m^2 - 3l - 2m + h\,.
\end{aligned}
$$

In ciascuno dei tre casi considerati la differenziazione esterna delle equazioni scritte conduce a cinque condizioni di integrabilità (che omettiamo) dalle quali risulta (15) che *ciascuno dei tipi di trasformazioni di seconda specie relativi a quei casi, dipende da cinque funzioni arbitrarie di una variabile.* Gli sviluppi locali, fino al terzo ordine, sono per i tre casi i seguenti

$$
k = 1)\quad
\begin{aligned}
\xi &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1-m}{2}x^3 - lx^2y + [4]\\
\eta &= y - xy + \frac{n}{2}x^3 + \frac{3m-1}{2}x^2y + lxy^2 + [4]\,,
\end{aligned}
$$

$$
l = 1)\quad
\begin{aligned}
\xi &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1-m}{2}x^3 - x^2y + [4]\\
\eta &= y - xy + \frac{n}{2}x^3 + \frac{3m-1}{2}x^2y + xy^2 + [4]\,,
\end{aligned}
$$

$$
n = 1)\quad
\begin{aligned}
\xi &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1-m}{2}x^3 - lx^2y + [4]\\
\eta &= y - xy + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3m-1}{2}x^2y + lxy^2 + [4]\,.
\end{aligned}
$$

Dalle (25), (26), (27) risulta che *le caratteristiche doppie per le trasformazioni dei tre tipi esaminati sono rette; le caratteristiche semplici possono anch'esse essere rette per i primi due tipi, ma non lo sono certamente per il terzo tipo* (16).

---

(15) In base alla teoria dei sistemi di equazioni di Pfaff in involuzione, per la quale rimandiamo ad: E. CARTAN, *Sur les variétés de courbure constante d'un éspace euclidien ou non-euclidien,* « Bull. Soc. Math. France », 47 (1919) e 48 (1920), 125-160 e 132-208.

(16) Per le trasformazioni di seconda specie con caratteristiche doppie rette indico qui, per il caso più generale, una costruzione geometrica fondata sull'ultima os-

6. - Ci rimane da esaminare l'ultimo caso, in cui si ha $k = l = n = 0$. Le (23) forniscono ora

$$\begin{gathered} \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_4 = \beta_4 = 0 \\ dh = \gamma_0 \omega_1 + \beta_0 \omega_2 \\ dm = \gamma_3 \omega_1 + \beta_3 \omega_2 \\ \beta_0 = \beta_3 = 0 , \quad \gamma_3 = 2m^2 - 2m + h . \end{gathered}$$

Si ha poi

$$[d\omega_{00}] = [\omega_1 \omega_{10}] + [\omega_2 \omega_{20}] = 0 ,$$

ω_{00} è dunque un differenziale esatto,

$$\omega_{00} = dF . \tag{28}$$

Questa relazione fornisce

$$\delta F = e_{00}$$

si può dunque far sì che sia $F = 0$ ed allora il riferimento è fissato. Le equazioni del n. 5 forniscono finalmente

$$\begin{aligned} &\omega_{00} = 0 \\ &\omega_{11} = - \omega_{22} = (3m - 2) \omega_1 \\ &\omega_{21} = 0 \\ &\omega_{12} = m \omega_2 \\ &\omega_{10} = h \omega_1 \\ &\omega_{20} = 0 . \end{aligned} \tag{29}$$

$$dh = \gamma_0 \omega_1 , \quad dm = (2m^2 - 2m + h) \omega_1 .$$

Si vede così ([17]) che *le trasformazioni in esame dipendono da una funzione arbitraria di una variabile.* Le (29) permettono di determinare le equazioni delle trasformazioni in forma finita. Si ha intanto

$$[d\omega_1] = 0 , \quad [d\omega_2] = (4m - 2) \cdot [\omega_1 \omega_2]$$

pertanto ω_1 è un differenziale esatto e si può scrivere

$$\omega_1 = du ;$$

---

servazione del n. 10. Nel piano α si consideri una curva Γ_α arbitraria e nel piano β una curva Γ_β, pure arbitraria. Si assegni, sempre ad arbitrio, una corrispondenza γ fra Γ_α e Γ_β. Siano r, $\bar{r}$ due rette tangenti rispettivamente a Γ_α e Γ_β in punti di quelle curve corrispondenti in γ. Se si assegna una proiettività fra ogni r ed $\bar{r}$, arbitraria, purchè in essa si corrispondano i punti di contatto di quelle rette con le relative curve, si ottiene una trasformazione fra α e β che è di seconda specie ed ha le rette r (rispettivamente $\bar{r}$) come caratteristiche doppie.

([17]) Cfr. la nota ([15]).

si ha pure

$$\omega_2 = p\,dv$$

dove [18]

$$p = e^{\int (4m-2)du} .$$

Le (29) danno ancora

$$h = \frac{dm}{du} - 2m(m-1)$$

$$\begin{aligned} dA &= A_1\,du + pA_2\,dv \\ dA_1 &= hA\,du + (3m-2)A_1du + mpA_2dv \\ dA_2 &= -(3m-2)A_2du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dB &= B_1du + pB_2dv \\ dB_1 &= hB\,du + (3m-1)B_1du + (m-1)pB_2dv \\ dB_2 &= -(3m-1)B_2du . \end{aligned}$$

I due sistemi alle derivate parziali che forniscono le trasformazioni considerate sono dunque [19]

$$A^{uu} = \left\{ \frac{dm}{du} - 2m(m-1) \right\} A + (3m-2)A^u ,$$

$$A^{uv} = mA^v , \qquad A^{vv} = 0 .$$

$$B^{uu} = \left\{ \frac{dm}{du} - 2m(m-1) \right\} B + (3m-1)B^u$$

$$B^{uv} = (m-1)B^v , \qquad B^{vv} = 0 .$$

Quei sistemi si integrano senza difficoltà; indicando con q la funzione di u

$$q = \int m\,du$$

e con C_1, C_2, C_3, K_1, K_2, K_3 delle costanti arbitrarie, si ha

$$A = C_1e^qv + C_2e^q \cdot \int e^{q-2u}du + C_3e^q$$

$$B = K_1e^{q-u}v + K_2e^{q-u} \cdot \int e^{q-u}du + K_3e^{q-u} .$$

---

(18) Si noti che m, in virtù delle ultime due (29), è funzione della sola u.

(19) Abbiamo indicato con A^u la derivata parziale $\frac{\partial A}{\partial u}$ ed analogamente per gli altri simboli.

Concludendo, a meno di omografie, le equazioni delle trasformazioni, in coordinate proiettive non omogenee sono

$$(30) \qquad \begin{aligned} \xi &= x \\ \eta &= \eta(y) \end{aligned}$$

dove $\eta(y)$ è una funzione arbitraria (non lineare) della y.

Si tratta dunque delle trasformazioni caratterizzate da quanto segue: *le caratteristiche doppie e quelle semplici sono, in ciascun piano, rette di un fascio.* Si osserverà che per $m = 3$ si ottiene la trasformazione quadratica di seconda specie

$$\xi = x$$
$$\eta = \frac{1}{y} .$$

§ 3. - Trasformazioni di terza specie.

7. - Esaminiamo ora le trasformazioni che per ogni coppia regolare di punti corrispondenti hanno una sola direzione caratteristica (tripla). Nel caso presente si ha dalle (10) che si può far sì che sia $c_0 = 1$, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Allora le (9) e (10) forniscono

$$(31) \qquad \begin{aligned} dg_1 - 4g_1\omega_{11} - 2g_1\omega_{22} - 2g\omega_{12} + \omega_{20} &= \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \\ dg - 3g\omega_{11} - 3g\omega_{22} - g_1\omega_{21} &= \lambda_2\omega_1 + \lambda_3\omega_2 \\ -2g\omega_{21} &= \lambda_3\omega_1 + \lambda_4\omega_2 \\ -\omega_{21} + \frac{1}{2}g\omega_2 &= a_1\omega_1 - \frac{1}{2}g\omega_2 \\ -3\omega_{11} + g_1\omega_2 &= a_0\omega_1 + a_1\omega_2 \\ g_2 &= 0 \end{aligned}$$

e da queste si ha

$$(32) \qquad \begin{aligned} e_{11} = e_{21} = 0 , \qquad e_{22} &= -e_{00} \\ \delta g + 3ge_{00} &= 0 \\ dg_1 + 2g_1e_{00} - 2ge_{12} + e_{20} &= 0 . \end{aligned}$$

Si vede così che g è un invariante relativo. Supponiamolo in primo luogo diverso dallo zero, il che (come si vedrà) costituisce il caso generale. Allora si può far sì che sia $g = 1$, inoltre le (32) mostrano che si può anche far sì che sia $g_1 = 0$. Si ha allora

$$e_{00} = e_{11} = e_{22} = e_{21} = 0 , \qquad e_{20} = 2e_{12}$$

e le (31) forniscono, dopo manifeste posizioni

$$
\begin{aligned}
\omega_{00} &= -l\omega_1 - 2h\omega_2 \\
\omega_{11} &= k\omega_1 + h\omega_2 \\
\omega_{22} &= (l-k)\omega_1 + h\omega_2 \\
\omega_{21} &= 3h\omega_1 + \omega_2 \\
\omega_{20} - 2\omega_{12} &= m\omega_1 - 3l\omega_2 \,.
\end{aligned} \tag{32}
$$

La differenziazione esterna delle (32) conduce poi alle relazioni seguenti

$$
\begin{aligned}
dl - \omega_{10} - 2h\omega_{12} &= \gamma_0\omega_1 + \beta_0\omega_2 \\
dh - \omega_{12} &= \gamma_1\omega_1 + \beta_1\omega_2 \\
dk - \omega_{10} - 4h\omega_{12} &= \gamma_2\omega_1 + \beta_2\omega_2 \\
dm + (9l - 6k)\omega_{12} + 3h\omega_{10} &= \gamma_3\omega_1 + \beta_3\omega_2
\end{aligned}
$$

avendosi

$$
\begin{aligned}
2\gamma_1 - \beta_0 + 2hk - 4lh - m &= 0 \\
\gamma_1 - \beta_2 + hk - 2lh &= 0 \\
\beta_1 - k + 2l &= 0 \\
\beta_3 + 3\gamma_0 - 12l^2 + 6lk - 3mh &= 0
\end{aligned}
$$

Si ha dunque

$$
\begin{aligned}
\delta l - e_{10} - 2he_{12} &= 0 \\
\delta h - e_{12} &= 0 \\
\delta k - e_{10} - 4he_{12} &= 0 \\
\delta m + (9l - 6k)e_{12} + 3he_{10} &= 0 \,.
\end{aligned}
$$

Si vede dunque che si può far sì che sia $h = 0$ e poi anche $k = 0$; allora si ha

$$
e_{12} = e_{20} = 0 \,, \qquad e_{10} = 0
$$

ed il riferimento è fissato. Dopo manifeste posizioni si ha finalmente

$$
\begin{aligned}
&\omega_{00} = -l\omega_1 \,, \qquad \omega_{11} = 0 \,, \qquad \omega_{22} = l\omega_1 \\
&\omega_{21} = \omega_2 \\
&\omega_{12} = p\omega_1 + 2l\omega_2 \\
&\omega_{10} = r\omega_1 + p\omega_2 \\
&\omega_{20} = (m + 2p)\omega_1 + l\omega_2 \\
&dl = (q + r)\omega_1 - (p + m)\omega_2 \\
&dm = (s + 9lp)\omega_1 + (30l^2 - 3q)\omega_2 \,.
\end{aligned} \tag{33}
$$

Vi sono pertanto 6 invarianti fondamentali l, m, p, q, r, s; essi sono legati dalle relazioni che derivano dalle (33) per differenziazione esterna (4 relazioni che omettiamo). Da quelle relazioni risulta che *le trasformazioni in esame dipendono da quattro funzioni arbitrarie di una variabile,* esse costituiscono le più generali trasformazioni di terza specie. Le (33) mostrano poi che, nel caso attuale *le caratteristiche non sono mai rette,* e conducono ai seguenti sviluppi locali (fino al 3° ordine) ([20])

$$\xi = x + \frac{1}{2} x^2 y + [4] \qquad (34)$$

$$\eta = y - \frac{1}{2} x^2 + x y^2 + [4] .$$

8. - Passiamo al caso in cui si abbia $g = 0$; vedremo ora che le trasformazioni di terza specie relative al caso attuale *sono quelle che hanno per caratteristiche delle rette* ([21]). Dalle (31) segue anche ora che si può far sì che sia $g_1 = 0$; dopo di che, fatte alcune manifeste posizioni si ha

$$(35) \quad \begin{aligned} &e_{11} = e_{21} = e_{20} = 0 , \qquad e_{22} = - e_{00} \\ &\omega_{11} = l\omega_1 + k\omega_2 \\ &\omega_{21} = 3k\omega_1 \\ &\omega_{20} = h\omega_1 . \end{aligned}$$

Da queste si traggono le altre

$$(35') \quad \begin{aligned} dh + 2h\omega_{00} - h\omega_{22} + 3k\omega_{10} + 2hk\omega_2 &= \gamma_0\omega_1 \\ dk + k\omega_{00} - k\omega_{22} + 3k^2\omega_2 &= \gamma_1\omega_1 \\ dl + l\omega_{00} - l\omega_{11} - 4k\omega_{12} - \omega_{10} &= \gamma_2\omega_1 + \beta_2\omega_2 \end{aligned}$$

avendosi

$$\gamma_1 - \beta_2 - 3kl = 0$$

sicchè

$$(36) \quad \begin{aligned} \delta h + 3he_{00} + 3ke_{10} &= 0 \\ \delta k + 3ke_{00} &= 0 \\ \delta l + le_{00} - le_{11} - 4ke_{12} - e_{10} &= 0 . \end{aligned}$$

([20]) Da quegli sviluppi risulta che la *proiettività caratteristica* $\eta = y$ fra le rette caratteristiche $x = \xi = 0$ è inflessionale di 2ª specie. (Cfr. la nota ([18])).

([21]) Come ho detto nell'Introduzione le trasformazioni in questione sono state studiate nella « Deuxième partie » del lavoro del Boruwka citato in ([1]), ma soltanto nel caso più generale, nel quale viene assegnata una costruzione geometrica. Ne indicherò una, per un caso diverso (più particolare), nella nota ([22]).

Occorre distinguere due casi secondo che l'invariante relativo k è diverso dallo zero o è nullo.

Se $k \neq 0$, si può far sì che sia $k = 1$ ed allora risulta dalle (36) che si può anche far sì che sia $h = 0$ e poi $l = 0$, dopo di che è $e_{00} = e_{10} = e_{12} = 0$ ed il riferimento è fissato. Fatte alcune posizioni si ha infine

$$
\begin{aligned}
\omega_{00} &= -2n\omega_1 - 2\omega_2 \\
\omega_{11} &= \omega_2 \\
\omega_{22} &= 2n\omega_1 + \omega_2 \\
\omega_{21} &= 3\omega_1 \\
\omega_{12} &= p\omega_1 + n\omega_2 \\
\omega_{10} &= m\omega_1 \\
\omega_{20} &= 0\,.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Si hanno nel caso presente tre invarianti fondamentali m, n, p che soddisfano alle condizioni

$$
\begin{aligned}
&[\{dn + 6n\omega_2\}\omega_1] = 0 \\
&[\{dm - 3m\omega_2\}\omega_1] = 0 \\
&[dp\,\omega_1] + [dn\,\omega_2] - (m + n^2)\,[\omega_1\omega_2] = 0
\end{aligned}
$$

dalle quali risulta subito che le *trasformazioni in esame dipendono da tre funzioni arbitrarie di una variabile.*

Se invece $k = 0$ le (36) mostrano che si debbono ancora distinguere due casi a seconda che sia h diverso dallo zero oppure $h = 0$. Supponiamo che sia $h \neq 0$, sicchè si può far sì che sia $h = 1$ e poi $l = 0$. Le equazioni che allora si ottengono dalle (35) e (35'), differenziate esternamente, conducono poi alla $\gamma_2 = 0$ e infine, dopo manifeste posizioni, si hanno per questo tipo di trasformazioni le seguenti equazioni

$$
\begin{aligned}
\omega_{00} &= m\omega_1 \\
\omega_{11} &= 0 \\
\omega_{22} &= -m\omega_1 \\
\omega_{21} &= 0 \\
\omega_{12} &= p\omega_1 \\
\omega_{10} &= 0 \\
\omega_{20} &= \omega_1
\end{aligned}
\tag{38}
$$

avendosi

$$[(dm - \omega_2)\,\omega_1] = [dp\,\omega_1] = 0\,.$$

Le trasformazioni in esame posseggono due invarianti fondamentali m, p e dipendono da due funzioni arbitrarie di una variabile. Non ci soffermeremo a considerarle più dettagliatamente.

Per le trasformazioni di questo numero con $k \neq 0$ le caratteristiche sono rette di un fascio (in ciascun piano) solo se $n = 0$ [22]. Per le altre le caratteristiche non appartengono mai ad un fascio.

9. - In questo numero esamineremo il caso in cui anche h sia nullo. Attualmente si ha dalle relazioni del n. 8:

$$\begin{aligned} \omega_{20} = \omega_{21} = \omega_{11} = 0 \\ \omega_{10} = m\omega_1 \,. \end{aligned} \tag{39}$$

La differenziazione esterna conduce alle

$$\begin{aligned} dm + 2m\omega_{00} &= 2p\omega_1 \\ \delta m + 2me_{00} &= 0\,. \end{aligned}$$

Supponiamo in primo luogo $m \neq 0$ e facciamo sì che sia $m = 1$. Si ha allora

$$\begin{gathered} \omega_{00} = p\omega_1\,, \quad \omega_{11} = 0\,, \quad \omega_{22} = -p\omega_1 \\ \omega_{21} = 0\,, \quad \omega_{20} = 0\,, \quad \omega_{10} = \omega_1 \\ [dp\omega_1] = 0\,. \end{gathered} \tag{40}$$

Dalle (40) si ha che $[d\omega_1] = 0$ cioè che ω_1 è un differenziale esatto $\omega_1 = du$. L'ultima delle (40) mostra che p è funzione della sola u. Indichiamo con f una funzione di u sicchè $df = f'\omega_1$; consideriamo la forma di Pfaff $\omega_{12} + f\omega_2$, si ha

$$[d(\omega_{12} + f\omega_2)] = [\omega_1\{(f + p)\,\omega_{12} + (2fp + 1 + f')\,\omega_2\}]$$

---

[22] Le trasformazioni di terza specie per le quali le caratteristiche sono rette di un fascio (in ciascun piano) sono state considerate da G. CASADIO nell'op. cit. in [4], che ha ottenuto per quelle trasformazioni le equazioni

$$\begin{aligned} \xi &= f(x) \\ \eta &= \varphi(x)y + \psi(x) \end{aligned} \tag{*}$$

con la condizione analitica $\varphi^2 = \dfrac{df}{dx}$, f, ψ essendo funzioni arbitrarie. Voglio qui dare l'interpretazione geometrica della predetta condizione: le (*), a prescindere da qualsiasi condizione per la φ, rappresentano una trasformazione T che muta le rette $x = \text{cost.}$ nelle rette $\xi = \text{cost.}$ subordinando fra due rette corrispondenti una proiettività nella quale si corrispondono i punti impropri di quelle rette. Si considerino due rette $x = \text{cost.}$ infinitamente vicine e le due corrispondenti in T; esiste una ben determinata omografia Ω che subordina fra quelle due coppie di rette le stesse proiettività che T. Ebbene affinchè T sia di terza specie occorre e basta che Ω subordini fra i due fasci di rette $x = \text{cost.}$, $\xi = \text{cost.}$ una proiettività (ben determinata per ogni coppia di rette) che approssima la corrispondenza $\xi = f(x)$ fino al secondo ordine.

se prendiamo f in modo che sia

$$\frac{1 + f' + 2fp}{f + p} = f$$

cioè

$$f' = f^2 - fp - 1$$

allora la forma $\omega_{12} + f\omega_2$ ammette il fattore integrante $e^{-\int (f+p)du}$, sicchè si ha

$$e^{-\int (f+p)du} \cdot \{\omega_{12} + f\omega_2\} = dF$$

e quindi

$$\delta F = C e_{12} \tag{41}$$

dove C è una costante non nulla. La (41) mostra che si può far sì che sia $F = 0$ ed allora il riferimento è fissato. In definitiva si ha per le trasformazioni in esame, oltre alle (40), la relazione

$$\omega_{12} = - f\omega_2 \, . \tag{42}$$

Le relazioni ottenute mostrano che *quelle trasformazioni dipendono da una funzione arbitraria di una variabile;* si possono ottenere senza difficoltà le equazioni in forma finita. Si ha infatti, procedendo come nel n. 6,

$$\omega_2 = e^{\int (2p-f)du} \cdot dv = H dv$$

ed il sistema di equazioni alle derivate parziali che fornisce le equazioni cercate è

$$A^{uu} = (p' + 1)A + pA^u \, , \qquad A^{uv} = (p - f)A^v \, , \qquad A^{vv} = 0$$
$$B^{uu} = (p' + 1)B + pB^u - H \cdot B^v \, , \qquad B^{uv} = (p - f)B^v \, , \qquad B^{vv} = 0 \, .$$

Il sistema scritto si integra facilmente e conduce alle equazioni, in coordinate proiettive non omogenee.

$$\xi = x$$
$$\eta = y + \eta(x) \, ,$$

dove $\eta(x)$ è una funzione arbitraria di x, non lineare nè a derivata terza nulla. *Le caratteristiche sono rette di un fascio, in entrambi i piani, e fra i due fasci è subordinata una proiettività.*

In principio di questo numero abbiamo supposto $m \neq 0$; se è invece $m = 0$ si osservi anzitutto che ω_{00} è un differenziale esatto, in quella ipotesi, sicchè si può far sì che sia $\omega_{00} = 0$, dopo di che anche ω_{12} diventa un

differenziale esatto e si può far sì che sia $\omega_{12} = 0$. Il riferimento è allora fissato e si ha

$$\omega_{00} = \omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{21} = \omega_{12} = \omega_{10} = \omega_{20} = 0$$

la relativa trasformazione si determina facilmente come per le altre. Si tratta della *trasformazione quadratica di terza specie* di equazioni

$$\xi = x$$
$$\eta = y - \frac{1}{2} x^2 .$$

10. - Vogliamo fare alcune osservazioni finali cui danno luogo gli sviluppi contenuti nel presente lavoro.

È noto [23] che per le trasformazioni di prima specie sussiste la seguente proposizione: se due trasformazioni di prima specie si possono porre in corrispondenza in modo tale che gli intorni del 3° ordine di coppie corrispondenti siano omografici, allora le due trasformazioni sono omografiche. Ciò risulta dal fatto che gli invarianti della trasformazione che intervengono, in quel caso, nell'intorno del 3° ordine determinano tutti gli altri, in virtù delle condizioni di integrabilità a cui essi debbono soddisfare. Orbene si verifica facilmente che *non sussiste una proposizione analoga per le trasformazioni di seconda e terza specie*, eccezion fatta per le trasformazioni di seconda specie esaminate nel n. 6, quelle cioè per le quali le caratteristiche in ciascun piano, sono rette di due fasci [24].

Un'altra osservazione è la seguente: *per le trasformazioni di seconda specie le cui caratteristiche doppie sono rette, la corrispondenza subordinata dalla trasformazione fra due di quelle caratteristiche corrispondenti è proiettiva*; *analogamente per le trasformazioni di terza specie le cui caratteristiche sono rette.*

Altri risultati di carattere geometrico si potrebbero dedurre dalle formule contenute nel presente lavoro, ma qui non mi ci soffermerò.

---

(23) Vedasi l'op. cit. in (11).

(24) Osserviamo che, in particolare, tutte le trasformazioni del n. 9 si possono approssimare fino all'intorno del 3° ordine di ogni coppia regolare mediante la trasformazione quadratica di terza specie.

NUOVE RICERCHE SUL PROBLEMA DI CAUCHY (*)

Memoria di Carlo Pucci
presentata dal Socio nazionale non residente Mauro Picone
nell'adunanza del 9 Dicembre 1953

Riassunto. — *Viene studiato il problema di Cauchy relativo ad equazioni lineari a derivate parziali trattando le seguenti questioni: esistenza, unicità e calcolo approssimato della soluzione, suo campo di esistenza, irriducibilità delle ipotesi, un criterio di confronto e sul problema inverso di Cauchy-Kovalevski.*

Si stabiliscono alcuni teoremi di esistenza ed unicità *in grande* per la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} + a(x,t)\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n} = f(x,t)\,, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \quad \left[\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial t^i}\right]_{t=0} = u_i(x)\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{2}$$

supponendo $a(x,t)$, $f(x,t)$, $u_i(x)$ funzioni dotate di derivate di qualsiasi ordine rispetto ad x e solamente continue rispetto a t. Queste ipotesi sono irriducibili nel senso che verrà precisato. Si determina inoltre una serie di funzioni convergenti uniformemente alla soluzione che in tale modo può essere calcolata con una approssimazione prescritta. Si stabilisce infine un teorema di confronto fra le soluzioni dei problemi di Cauchy del tipo (1), (2) e si risolve in parte un quesito recentemente proposto da G. Salehov e V. Tridlender [1].

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

[1] G. Salehov-V. Tridlender, *Sulle questioni relative al problema inverso del problema di Cauchy-Kovalevski*, « Uspehi Mat. Nauk. » 7, 5 (51) (1952), pp. 169-192. Sono potuto venire a conoscenza di tale pubblicazione russa prima della sua recensione grazie a una cortese segnalazione del professore Roberto Conti.

Risultati analoghi a quelli ottenuti nel presente lavoro sono stati esposti in una precedente Memoria [2] relativamente al problema di Cauchy

$$\sum_{i_1+\ldots+i_r+s<m} a_{i_1,\ldots i_r,s}(t)\,\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_r+s}u(x_1,\ldots,x_r,t)}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_r^{i_r}\partial t^s}=f(x_1,\ldots,x_r,t)\,,$$

$$\left[\frac{\partial^i u(x_1,\ldots,x_r,t)}{\partial t^i}\right]_{t=0}=u_i(x_1,\ldots,x_r)\,,\qquad i=0,1,\ldots,m-1\,;$$

questi risultati possono essere estesi al caso che i coefficienti $a_{i_1,\ldots,i_r,s}$ dipendano da tutte le variabili con considerazioni analoghe a quelle svolte nel presente studio. Notiamo infine che tali ricerche possono dirigersi anche al caso che le condizioni iniziali siano assegnate su una porzione di ipersuperficie analitica, in rappresentazione cartesiana $t=\vartheta(x_1,\ldots,x_r)$, sia con un procedimento diretto, sia riconducendosi al caso precedente con un cambiamento di variabili che trasformi tale ipersuperficie nell'iperpiano $t=0$.

1. — Sia R il rettangolo del piano (x,t) definito dalle limitazioni $x_1\leq x\leq x_2$, $|t|\leq l$ e sia $C^{(\infty)}$ la classe delle funzioni dotate in R di derivate parziali rispetto ad x di qualsiasi ordine continue. Diciamo che una funzione $\varphi(x,t)$ è di classe $G_x[\alpha,\varrho,M]$ in R se essa appartiene alla classe $C^{(\infty)}$ ed inoltre verifica le limitazioni

$$\left|\frac{\partial^s\varphi(x,t)}{\partial x^s}\right|<M\,\frac{(s!)^\alpha}{\varrho^s}\qquad \text{per}\quad (x,t)\in R,\quad s=0,1,\ldots \tag{3}$$ [3].

Indicato con $a(x,t)$ una funzione della classe $C^{(\infty)}$, sia A l'operatore così definito:

$$A\varphi(x,t)=-\int_0^t\frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!}\,a(x,\tau)\,\frac{\partial^n\varphi(x,\tau)}{\partial x^n}\,d\tau\,. \tag{4}$$

Notiamo che se $\varphi(x,t)\in C^{(\infty)}$ anche $A\varphi(x,t)\in C^{(\infty)}$ e possiamo quindi definire la funzione $A^2\varphi(x,t)=A[A\varphi(x,t)]$, ed in generale

$$A^s\varphi(x,t)=A[A^{s-1}\varphi(x,t)]\qquad\text{per}\quad s=2,3,\ldots,$$

risultando tali funzioni della classe $C^{(\infty)}$. Conveniamo inoltre

$$A^0\varphi(x,t)=\varphi(x,t)\,.$$

Ciò posto abbiamo il seguente teorema.

---

[2] C. PUCCI, *Il problema di Cauchy per le equazioni lineari a derivate parziali*, « Ann. Mat. pura e appl. » 4, 35 (1953), pp. 129-153.

[3] Tale funzione è di classe α secondo M. GEVREY, *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles*, « Ann. Ec. Norm. » 3, 35 (1918), pp. 129-190.

TEOREMA I. — *Se le funzioni* $a(x, t)$, $f(x, t)$, $u_i(x)$ *sono di classe* $G_x\left[\frac{m}{n}, \varrho, M\right]$ *in* R *e se* $m \geq n$ *e*

$$n^m M l^m e^{2n+m+1} < m^m \varrho^n \quad (4) \tag{5}$$

allora esiste una ed una sola funzione $u(x, t)$ *soluzione del problema di Cauchy* (1), (2) *in* R (5) *ed ivi di classe* $G_x\left[\frac{m}{n}, \varrho e^{-1-\frac{m}{n}}, \Omega\right]$, *ove*

$$\Omega = Me^l(4\pi n)^m \sum_{s=1}^{\infty} s^m e^{-ns} + Me^l . \tag{6}$$

Tale funzione $u(x, t)$ *è la somma della serie uniformemente convergente in* R

$$\sum_{s=0}^{\infty} A^s F(x, t) , \tag{7}$$

avendo posto

$$F(x, t) = \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x) \frac{t^i}{i!} + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} f(x, \tau) d\tau . \tag{8}$$

Proviamo dapprima l'unicità della soluzione. Supponiamo che esista una funzione $u(x, t)$ di classe $G_x\left[\frac{m}{n}, \varrho e^{-1-\frac{m}{n}}, \Omega\right]$ in R soluzione del problema di Cauchy (1), (2). Dalla (1) si ottiene

$$\int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^m u(x, \tau)}{\partial \tau^m} d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} f(x, \tau) d\tau - \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} a(x, \tau) \frac{\partial^n u(x, \tau)}{\partial x^n} d\tau ,$$

e per le (2)

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x) \frac{t^i}{i!} +$$

$$+ \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} f(x, \tau) d\tau - \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} a(x, \tau) \frac{\partial^n u(x, \tau)}{\partial x^n} d\tau ,$$

---

(4) Notiamo che a tale condizione si può sempre soddisfare comunque siano M e ϱ riducendo l'altezza l del rettangolo R considerato.

(5) Si dice che una funzione $u(x, t)$ è soluzione in R del problema di CAUCHY considerato se possiede continue in R le derivate parziali $\frac{\partial^m u}{\partial t^m}$, $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$ ed inoltre soddisfa alle equazioni (1), (2).

e per la (4) e la (8)

$$u(x, t) = F(x, t) + Au(x, t) . \tag{9}$$

Notiamo che $u(x, t)$, $F(x, t)$ appartengono alla classe $C^{(\infty)}$ e quindi sono definite le funzioni $A^s u(x, t)$, $A^s F(x, t)$ per $s = 1, 2, \dots$. Sostituendo nel secondo membro della (9) ad $u(x, t)$ la sua espressione data dalla (9) stessa si ottiene

$$u(x, t) = F(x, t) + AF(x, t) + A^2 u(x, t) ;$$

sostituendo ancora sempre ad $u(x, t)$ la sua espressione data dalla (9) si ha

$$u(x, t) = F(x, t) + AF(x, t) + A^2 F(x, t) + A^3 u(x, t) .$$

Così procedendo otteniamo

$$u(x, t) = \sum_{\nu=0}^{s-1} A^\nu F(x, t) + A^s u(x, t) . \tag{10}$$

Proviamo che $A^s u(x, t)$ converge a zero per $s \to \infty$. Si ha per la (4)

$$A^s u(x,t) = (-1)^s \int_0^t \frac{(t-\tau_1)^{m-1}}{(m-1)!} a(x, \tau_1) \frac{\partial^n}{\partial x^n} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \frac{(\tau_1 - \tau_2)^{m-1}}{(m-1)!} a(x, \tau_2) \frac{\partial^n}{\partial x^n} d\tau_2 \dots$$

$$\dots \int_0^{\tau_{s-1}} \frac{(\tau_{s-1} - \tau_s)^{m-1}}{(m-1)!} a(x, \tau_s) \frac{\partial^n u(x, \tau_s)}{\partial x^n} d\tau_s =$$

$$= (-1)^s \int_0^t \frac{(t-\tau_1)^{m-1}}{(m-1)!} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \frac{(\tau_1 - \tau_2)^{m-1}}{(m-1)!} d\tau_2 \dots$$

$$\dots \int_0^{\tau_{s-1}} \frac{(\tau_{s-1} - \tau_s)^{m-1}}{(m-1)!} a(x, \tau_1) \frac{\partial^n}{\partial x^n} a(x, \tau_2) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \dots a(x, \tau_s) \frac{\partial^n u(x, \tau_s)}{\partial x^n} d\tau_s \quad [6]$$

essendo lecita la derivazione rispetto ad x sotto il segno d'integrale per le ipotesi fatte relativamente alle funzioni $a(x, t)$, $u(x, t)$. Ne segue per $(x, t) \in R$

$$|A^s u(x,t)| \leq \frac{|t|^{ms}}{(ms)!} \max_R \left| a(x, \tau_1) \frac{\partial^n}{\partial x^n} a(x, \tau_2) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \dots a(x, \tau_s) \frac{\partial^n}{\partial x^n} u(x, \tau_s) \right| . \tag{11}$$

Fissate due costanti ξ, ε tali che $x_1 \leq \xi < \xi + \varepsilon \leq x_2$, $\varepsilon < \varrho e^{-1-\frac{m}{n}}$, poniamo

$$R_{\xi, \varepsilon} \equiv [\xi \leq x \leq \xi + \varepsilon, \ |t| \leq l], \qquad \alpha = \xi + \varrho e^{-1-\frac{m}{n}} .$$

(6) L'operatore $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$ si intende sempre applicato a tutta l'espressione che lo segue.

Essendo

$$\frac{d^s(\alpha - x)^{-1}}{dx^s} = \frac{s!}{(\alpha - x)^{s+1}} > \frac{s!}{\left(\varrho e^{-1-\frac{m}{n}}\right)^{s+1}} \quad \text{per} \quad \xi \leq x \leq \xi + \varepsilon,$$

poichè $a(x, t)$ è di classe $G_x\left[\frac{m}{n}, \varrho, M\right]$ in R ed $u(x, t)$ di classe $G_x\left[\frac{m}{n}, \varrho e^{-1-\frac{m}{n}}, \Omega\right]$ si ha

$$\left|\frac{\partial^s a(x, t)}{\partial x^s}\right| < M\varrho e^{-1-\frac{m}{n}} (s!)^{\frac{m}{n}-1} \frac{d^s}{dx^s} \frac{1}{(\alpha - x)} \quad \text{per} \quad (x, t) \in R_{\xi,\epsilon}, \quad s = 0, 1, \ldots,$$

$$\left|\frac{\partial^s u(x, t)}{\partial x^s}\right| < \Omega\varrho e^{-1-\frac{m}{n}} (s!)^{\frac{m}{n}-1} \frac{d^s}{dx^s} \frac{1}{(\alpha - x)} \quad \text{per} \quad (x, t) \in R_{\xi,\epsilon}, \quad s = 0, 1 \ldots .$$

Indicato quindi con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{s-1}$ dei numeri naturali la cui somma non supera ns la funzione

$$(12) \qquad a(x, \tau_1) \frac{\partial^{\lambda_1} a(x, \tau_2)}{\partial x^{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial^{\lambda_{s-1}} a(x, \tau_s)}{\partial x^{\lambda_{s-1}}} \frac{\partial^{ns-\lambda_1-\ldots-\lambda_{s-1}} u(x, \tau_s)}{\partial x^{ns-\lambda_1-\ldots-\lambda_{s-1}}}$$

è in valore assoluto minore in $R_{\xi,\epsilon}$ di

$$\Omega M^s \varrho^{s+1} e^{-\frac{m+n}{n}(s+1)} (\lambda_1!)^{\frac{m}{n}-1} \ldots (\lambda_{s-1}!)^{\frac{m}{n}-1} [(ns - \lambda_1 - \ldots - \lambda_{s-1})!]^{\frac{m}{n}-1} \times$$

$$\times \frac{d^{\lambda_1}(\alpha - x)^{-1}}{dx^{\lambda_1}} \cdots \frac{d^{\lambda_{s-1}}(\alpha - x)^{-1}}{dx^{\lambda_{s-1}}} \frac{d^{ns-\lambda_1-\ldots-\lambda_{s-1}}(\alpha - x)^{-1}}{dx^{ns-\lambda_1-\ldots-\lambda_{s-1}}} \leq$$

$$\leq \Omega M^s \left(\varrho e^{-1-\frac{m}{n}}\right)^{s+1} [(ns)!]^{\frac{m}{n}-1} \frac{d^{\lambda_1}(\alpha-x)^{-1}}{dx^{\lambda_1}} \cdots \frac{d^{\lambda_{s-1}}(\alpha-x)^{-1}}{dx^{\lambda_{s-1}}} \frac{d^{ns-\lambda_1-\ldots-\lambda_{s-1}}(\alpha-x)^{-1}}{dx^{ns-\lambda_1-\ldots-\lambda_{s-1}}}.$$

Siccome la funzione

$$(13) \qquad a(x, \tau_1) \frac{\partial^n}{\partial x^n} a(x, \tau_2) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \ldots a(x, \tau_s) \frac{\partial^n}{\partial x^n} u(x, \tau_s)$$

è somma di termini analoghi alla funzione (12) il suo valore assoluto in $R_{\xi,\epsilon}$ è minore di

$$(14) \qquad \Omega M^s \left(\varrho e^{-1-\frac{m}{n}}\right)^{s+1} [(ns)!]^{\frac{m}{n}-1} \left(\frac{1}{\alpha - x} \frac{d^n}{dx^n}\right)^s \frac{1}{\alpha - x},$$

avendo posto

$$\left(\frac{1}{\alpha - x} \frac{d^n}{dx^n}\right)^s = \frac{1}{\alpha - x} \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{\alpha - x} \frac{d^n}{dx^n}\right)^{s-1} \quad \text{per} \quad s = 2, 3, \ldots .$$

Proviamo che

$$(15) \qquad \left(\frac{1}{a-x}\frac{d^n}{dx^n}\right)^s \frac{1}{a-x} = \frac{[s(n+1)]!}{s!(n+1)} \frac{1}{(a-x)^{sn+s+1}}.$$

Tale relazione è vera per $s = 1$ e se è vera per $s = \lambda$ si verifica anche per $s = \lambda + 1$; infatti

$$\frac{1}{a-x}\frac{d^n}{dx^n}\frac{(n\lambda+\lambda)!}{\lambda!(n+1)}\frac{1}{(a-x)^{n\lambda+\lambda+1}} = \frac{(n\lambda+\lambda+n)!}{\lambda!(n+1)}\frac{1}{(a-x)^{n\lambda+\lambda+n+2}} =$$
$$= \frac{(n\lambda+\lambda+n+1)!}{(\lambda+1)!(n+1)}\frac{1}{(a-x)^{n\lambda+\lambda+n+2}}.$$

Avendo provato che il valore assoluto della funzione (13) è minore in $R_{\xi,\epsilon}$ della funzione (14) per la (15) è

$$\max_{R_{\xi,\epsilon}}\left|a(x,\tau_1)\frac{\partial^n}{\partial x^n}a(x,\tau_2)\frac{\partial^n}{\partial x^n}\dots a(x,\tau_s)\frac{\partial^n}{\partial x^n}u(x,\tau_s)\right| \leq$$
$$\leq \frac{(ns+s)!}{s!(n+1)}[(ns)!]^{\frac{m}{n}-1}\frac{\Omega M^s\left(\varrho e^{-1-\frac{m}{n}}\right)^{s+1}}{(a-x)^{ns+s+1}} \leq$$
$$\leq \frac{(ns+s)!}{s!(n+1)}[(ns)!]^{\frac{m}{n}-1}\frac{\Omega M^s\left(\varrho e^{-1-\frac{m}{n}}\right)^{s+1}}{\left(\varrho e^{-1-\frac{m}{n}}-\varepsilon\right)^{ns+s+1}}.$$

Essendo $(\xi, \xi+\varepsilon)$ un qualsiasi intervallo contenuto in (x_1, x_2) con $\varepsilon < \varrho e^{-1-\frac{m}{n}}$, per l'arbitrarietà di ε e ξ segue

$$\max_R\left|a(x,\tau_1)\frac{\partial^n}{\partial x^n}a(x,\tau_2)\frac{\partial^n}{\partial x^n}\dots a(x,\tau_s)\frac{\partial^n}{\partial x^n}u(x,\tau_s)\right| \leq$$
$$\leq \frac{(ns+s)!}{s!(n+1)}[(ns)!]^{\frac{m}{n}-1}\frac{\Omega M^s}{\varrho^{ns}}e^{(m+n)s}.$$

Si ha perciò dalla (11)

$$|A^s u(x,t)| \leq \frac{l^{ms}}{(ms)!}\frac{(ns+s)!}{s!(n+1)}[(ns)!]^{\frac{m}{n}-1}\frac{\Omega M^s}{\varrho^{ns}}e^{(m+n)s}.$$

Essendo

$$(16) \qquad (ns+s)! \leq (ns)!\, s!\, e^{ns+s} \quad \text{per} \quad s = 0, 1, \dots$$ (7).

si ottiene

$$(17) \quad |A^s u(x,t)| \leq \frac{[(ns)!]^{\frac{m}{n}}}{(ms)!}\frac{\Omega M^s l^{ms} e^{(2n+m+1)s}}{(n+1)\varrho^{ns}} \quad \text{per} \quad (x,t)\in R, \quad s = 0, 1, \dots.$$

(7) Ciò per una limitazione relativa alle funzioni euleriane stabilita nella Memoria citata in (2) a pag. 131.

Applicando la classica formula di Stirling

$$(18) \qquad s! = \sqrt{2\pi s}\, s^s e^{-s} e^{\frac{\theta}{12s}}, \qquad 0 < \theta < 1, \quad s = 1, 2, \ldots$$

si ha per $s = 1, 2, \ldots$

$$(19) \qquad \frac{[(ns)!]^{\frac{m}{n}}}{(ms)!} = \frac{(2\pi ns)^{\frac{m}{2n}} (ns)^{ms} e^{-ms} e^{\frac{\theta_1}{12ns}}}{\sqrt{2\pi ms}\, (ms)^{ms} e^{-ms} e^{\frac{\theta_2}{12ms}}} < (4\pi n)^m s^m \left(\frac{n}{m}\right)^{ms}.$$

Si ottiene quindi per la (18)

$$|A^s u(x, t)| < \Omega (4\pi ns)^m \left(\frac{n^m M l^m e^{2n+m+1}}{m^m \varrho^n}\right)^s \quad \text{per} \quad (x, t) \in R, \; s = 1, 2, \ldots$$

e per la (5) $A^s u(x, t)$ per $s \to \infty$ converge uniformemente a zero in R. Dalla (10) segue allora che la serie (7) è uniformemente convergente in R e la sua somma è la soluzione $u(x, t)$. Se esistesse un'altra funzione $v(x, t)$, di classe $G_x\left[\frac{m}{n}, \varrho e^{-1-\frac{m}{n}}, \Omega\right]$ in R, soluzione del problema di Cauchy considerato, per quanto è stato provato essa è pure la somma della serie (7) e quindi coincide con $u(x, t)$.

Dimostriamo ora l'esistenza di una soluzione. Per le ipotesi fatte relativamente alle funzioni $f(x, t)$, $u_i(x)$ la funzione $F(x, t)$, definita dalla (8), ha derivate di qualsiasi ordine rispetto ad x continue in R ed inoltre, essendo

$$(20) \qquad \left|\frac{\partial^s F(x, t)}{\partial x^s}\right| = \left|\sum_{i=0}^{m-1} \frac{d^s u_i(x)}{dx^s} \frac{t^i}{i!} + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^s f(x, \tau)}{\partial x^s} d\tau\right| \leq$$

$$\leq M \frac{(s!)^{\frac{m}{n}}}{\varrho^s} \sum_{i=0}^{m} \frac{l^i}{i!} < M e^l \frac{(s!)^{\frac{m}{n}}}{\varrho^s},$$

la funzione $F(x, t)$ è in R di classe $G_x\left[\frac{m}{n}, \varrho, Me^l\right]$. Risulta quindi definita la funzione $A^s F(x, t)$, $s = 1, 2, \ldots$, ed è $A^s F(x, t) \in C^{(\infty)}$. Stabiliamo delle maggiorazioni per le derivate rispetto ad x della funzione $A^s F(x, t)$ con un procedimento analogo a quello precedentemente seguito per maggiorare $A^s u(x, t)$. Indicato con h un numero naturale è

$$(21) \qquad \frac{\partial^h A^s F(x, t)}{\partial x^h} = (-1)^s \int_0^t \frac{(t-\tau_1)^{m-1}}{(m-1)!} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \frac{(\tau_1 - \tau_2)^{m-1}}{(m-1)!} d\tau_2 \ldots$$

$$\ldots \int_0^{\tau_{s-1}} \frac{(\tau_{s-1} - \tau_s)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^h}{\partial x^h} a(x, \tau_1) \frac{\partial^n}{\partial x^n} a(x, \tau_2) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \ldots a(x, \tau_s) \frac{\partial^n}{\partial x^n} F(x, \tau_s) d\tau_s$$

essendo lecita la derivazione rispetto ad x sotto segno d'integrale per l'appartenenza di $a(x, t)$, $F(x, t)$ alla classe $C^{(\infty)}$. Ne segue per $(x, t) \in R$ ed $h = 0, 1, \ldots$ ed $s = 1, 2, \ldots$

$$\left|\frac{\partial^h A^s F(x,t)}{\partial x^h}\right| \leq \tag{22}$$

$$\leq \frac{l^{ms}}{(ms)!} \max_R \left|\frac{\partial^h}{\partial x^h} a(x, \tau_1) \frac{\partial^n}{\partial x^n} a(x, \tau_2) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \ldots a(x, \tau_s) \frac{\partial^n}{\partial x^n} F(x, \tau_s)\right| .$$

Fissate due costanti ξ, ε tali che $x_1 \leq \xi < \xi + \varepsilon \leq x_2$, $\varepsilon < \varrho$, poniamo

$$R_{\xi,\epsilon} \equiv [\xi \leq x \leq \xi + \varepsilon, \ \ |t| \leq l], \qquad \beta = \xi + \varrho .$$

Essendo

$$\frac{d^s(\beta - x)^{-1}}{dx_s} = \frac{s!}{(\beta - x)^{s+1}} > \frac{s!}{\varrho^{s+1}} \quad \text{per} \quad \xi \leq x \leq \xi + \varepsilon ,$$

ed essendo $a(x, t)$ di classe $G_x\left[\frac{m}{n}, \varrho, M\right]$ in R si ha

$$\left|\frac{\partial^s a(x, t)}{\partial x^s}\right| < (s!)^{\frac{m}{n}-1} M\varrho \frac{d^s}{dx^s} \frac{1}{\beta - x} \quad \text{per} \quad (x, t) \in R_{\xi,\epsilon}, \ s = 0, 1, \ldots .$$

Dalla (20) segue pure

$$\left|\frac{\partial^s F(x, t)}{\partial x^s}\right| < M\varrho e^l (s!)^{\frac{m}{n}-1} \frac{d^s}{dx^s} \frac{1}{\beta - x} \quad \text{per} \quad (x, t) \in R_{\xi,\epsilon}, \ s = 0, 1, \ldots .$$

Indicato quindi con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ dei numeri naturali la cui somma non supera $ns + h$ la funzione

$$\frac{\partial^{\lambda_1} a(x, \tau_1)}{\partial x^{\lambda_1}} \frac{\partial^{\lambda_2} a(x, \tau_2)}{\partial x^{\lambda_2}} \cdots \frac{\partial^{\lambda_s} a(x, \tau_s)}{\partial x^{\lambda_s}} \frac{\partial^{ns+h-\lambda_1-\ldots-\lambda_s} F(x, \tau_s)}{\partial x^{ns+h-\lambda_1-\ldots-\lambda_s}} \tag{23}$$

è in valore assoluto minore in $R_{\xi,\epsilon}$ di

$$M^{s+1} e^l \varrho^{s+1} (\lambda_1!)^{\frac{m}{n}-1} \ldots (\lambda_s!)^{\frac{m}{n}-1} [ns + h - \lambda_1 - \ldots - \lambda_s)!]^{\frac{m}{n}-1} \frac{d^{\lambda_1}(\beta - x)^{-1}}{dx^{\lambda_1}} \cdots$$

$$\cdots \frac{d^{\lambda_s}(\beta - x)^{-1}}{dx^{\lambda_s}} \frac{d^{ns+h-\lambda_1-\ldots-\lambda_s}(\beta - x)^{-1}}{dx^{ns+h-\lambda_1-\ldots-\lambda_s}} \leq M^{s+1} e^l \varrho^{s+1} [(ns+h)!]^{\frac{m}{n}-1} \frac{d^{\lambda_1}(\beta - x)^{-1}}{dx^{\lambda_1}} \cdots$$

$$\cdots \frac{d^{\lambda_s}(\beta - x)^{-1}}{dx^{\lambda_s}} \frac{d^{ns+h-\lambda_1-\ldots-\lambda_s}(\beta - x)^{-1}}{dx^{ns+h-\lambda_1-\ldots-\lambda_s}} .$$

Siccome la funzione

$$\frac{\partial^h}{\partial x^h} a(x, \tau_1) \frac{\partial^n}{\partial x^n} a(x, \tau_2) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \dots a(x, \tau_s) \frac{\partial^n}{\partial x^n} F(x, \tau_s) \tag{24}$$

è somma di termini analoghi alla funzione (23) allora il suo valore assoluto in $R_{\xi, \epsilon}$ è minore di

$$M^{s+1} e^l \varrho^{s+1} [(ns+h)!]^{\frac{m}{n}-1} \frac{d^h}{dx^h} \left[\left(\frac{1}{(\beta - x)} \frac{d^n}{dx^n} \right)^s \frac{1}{\beta - x} \right]. \tag{25}$$

Dalla (15) segue immediatamente

$$\frac{d^h}{dx^h} \left[\left(\frac{1}{\beta - x} \frac{d^n}{dx^n} \right)^s \frac{1}{\beta - x} \right] = \frac{(sn+s+h)!}{s!(n+1)} \frac{1}{(\beta - x)^{sn+s+h+1}} \tag{26}$$

per $s, h = 0, 1, \dots$.

Avendo provato che il valore assoluto della funzione (24) è minore in $R_{\xi, \epsilon}$ della funzione (25), dalla (26) segue

$$\max_{R_{\xi,\epsilon}} \left| \frac{\partial^h}{\partial x^h} a(x, \tau_1) \frac{\partial^n}{\partial x^n} a(x, \tau_2) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \dots a(x, \tau_s) \frac{\partial^n}{\partial x^n} F(x, \tau_s) \right| \leq$$

$$\leq \frac{(ns+s+h)!}{s!(n+1)} [(ns+h)!]^{\frac{m}{n}-1} \frac{M^{s+1} e^l \varrho^{s+1}}{(\beta - x)^{ns+s+h+1}} \leq$$

$$\leq \frac{(ns+s+h)!}{s!(n+1)} [(ns+h)!]^{\frac{m}{n}-1} \frac{M^{s+1} e^l \varrho^{s+1}}{(\varrho - \varepsilon)^{ns+s+h+1}} .$$

Essendo ξ, ε tali che $x_1 \leq \xi < \xi + \varepsilon \leq x_2$, $\varepsilon < \varrho$ e per il resto arbitrari ne segue

$$\max_R \left| \frac{\partial^h}{\partial x^h} a(x, \tau_1) \frac{\partial^n}{\partial x^n} a(x, \tau_2) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \dots a(x, \tau_s) \frac{\partial^n}{\partial x^n} F(x, \tau_s) \right| \leq$$

$$\leq \frac{(ns+s+h)!}{s!(n+1)} [(ns+h)!]^{\frac{m}{n}-1} \frac{e^l M^{s+1}}{\varrho^{ns+h}} \quad \text{per } h = 0, 1, \dots \text{ ed } s = 1, 2, \dots.$$

Si ha perciò dalla (22)

$$\left| \frac{\partial^h A^s F(x, t)}{\partial x^h} \right| \leq \frac{(ns+s+h)!}{s!(ms)!} [(ns+h)!]^{\frac{m}{n}-1} \frac{e^l M^{s+1} l^{ms}}{\varrho^{ns+h}}$$

per $(x, t) \in R$ ed $s, h = 0, 1, \dots$.

Essendo per la (16)

$$(ns+s+h)! \leq (sn+h)! s! e^{ns+s+h},$$

si ha

$$\left| \frac{\partial^h A^s F(x, t)}{\partial x^h} \right| \leq \frac{[(ns+h)!]^{\frac{m}{n}}}{(ms)!} \frac{e^{l+ns+s+h} M^{s+1} l^{ms}}{\varrho^{ns+h}},$$

ed essendo ancora

$$(ns+h)! \leq (ns)!\,h!\,e^{ns+h}$$

ne segue

$$\left|\frac{\partial^h A^s F(x,t)}{\partial x^h}\right| \leq M e^l \left(\frac{e^{1+\frac{m}{n}}}{\varrho}\right)^h (h!)^{\frac{m}{n}} \frac{[(ns)!]^{\frac{m}{n}}}{(ms)!} \left(\frac{e^{m+n+1} M l^m}{\varrho^n}\right)^s .$$

Si ottiene infine dalla (19)

$$\left|\frac{\partial^h A^s F(x,t)}{\partial x^h}\right| \leq M e^l (4\pi ns)^m \left(\frac{e^{1+\frac{m}{n}}}{\varrho}\right)^h (h!)^{\frac{m}{n}} \left(\frac{n^m M l^m e^{m+n+1}}{m^m \varrho^n}\right)^s$$

e per la (5)

$$\left|\frac{\partial^h A^s F(x,t)}{\partial x^h}\right| < M e^l \left(\frac{e^{1+\frac{m}{n}}}{\varrho}\right)^h (h!)^{\frac{m}{n}} (4\pi ns)^m e^{-ns} \tag{27}$$

per $(x,t) \in R,\ h=0, 1, \ldots$ ed $s=1, 2, \ldots$.

La serie a termini costanti positivi

$$\sum_{s=1}^{\infty} s^m e^{-ns}$$

è convergente e quindi per la (27) la serie

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\partial^h A^s F(x,t)}{\partial x^h}, \qquad h=0, 1, \ldots$$

è totalmente convergente in R e perciò anche uniformemente convergente. Da ciò segue per un noto teorema di derivazione per serie che, posto

$$u(x,t) = \sum_{s=0}^{\infty} A^s F(x,t), \qquad (x,t) \in R, \tag{28}$$

la funzione $u(x,t)$ è dotata in R di derivate parziali rispetto ad x di qualsiasi ordine ed è

$$\frac{\partial^h u(x,t)}{\partial x^h} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\partial^h A^s F(x,t)}{\partial x^h}, \quad \text{per} \quad (x,t) \in R,\ h=1, 2, \ldots. \tag{29}$$

Siccome le funzioni $A^s F(x,t)$ appartengono alla classe $C^{(\infty)}$ le loro derivate parziali rispetto ad x sono continue in R e dalla (29), per l'uniforme convergenza della serie, segue la continuità in R delle derivate par-

ziali di $u(x, t)$ rispetto ad x. Inoltre dalla (29) segue anche per la (16) e le (20) (27)

$$\left|\frac{\partial^h u(x,t)}{\partial x^h}\right| < \Omega\left(\frac{e^{1+\frac{m}{n}}}{\varrho}\right)^h (h!)^{\frac{m}{n}} \quad \text{per} \quad (x,t) \in R,\ h = 0, 1, \ldots$$

ovverossia la funzione $u(x, t)$ è di classe $G_x\left[\frac{m}{n}, \varrho e^{-1-\frac{m}{n}}, \Omega\right]$ in R.

Proviamo ora che la funzione $u(x, t)$ ha pure derivate parziali rispetto a t fino all'ordine m continue in R. Osserviamo che

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} A^s F(x,t) = -a(x,t)\frac{\partial^n}{\partial x^n} A^{s-1}F(x,t) \quad \text{per} \quad s = 1, 2, \ldots \tag{30}$$

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} F(x,t) = f(x,t)\,. \tag{31}$$

Si ha quindi per la (28)

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\partial^m}{\partial t^m} A^s F(x,t) = f(x,t) - a(x,t)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\partial^n}{\partial x^n} A^{s-1}F(x,t) = \tag{32}$$

$$= f(x,t) - a(x,t)\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n}$$

e perciò la serie del primo membro è uniformemente convergente in R; da ciò segue che $u(x, t)$ ha derivate parziali rispetto a t fino all'ordine m continue in R ed è

$$\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial t^i} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{\partial^i}{\partial t^i} A^s F(x,t) \quad \text{per} \quad i = 0, 1, \ldots, m \quad (^8). \tag{33}$$

Dimostriamo infine che $u(x, t)$ è soluzione del problema di Cauchy (1), (2). Dalle (32) e (33) segue

$$\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} = f(x,t) - a(x,t)\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n} \quad \text{per} \quad (x,t) \in R$$

e quindi $u(x, t)$ soddisfa all'equazione differenziale (1). Essendo inoltre per la (4)

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i} A^s F(x,t) = -\int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-i-1}}{(m-i-1)!}\, a(x,\tau)\frac{\partial^n}{\partial x^n} A^{s-1}F(x,\tau)d\tau,$$

$$i = 0, 1, \ldots, m-1 \quad \text{ed} \quad s = 1, 2, \ldots$$

---

[8] C. Pucci, *Alcuni teoremi sulle successioni di funzioni di più variabili che possiedono derivate parziali fino all'ordine r*. « Ann. Mat. pura e appl. » 4, 31 (1950), Teorema VII, pag. 137.

si ha

$$\left[\frac{\partial^i}{\partial t^i} A^s F(x, t)\right]_{t=0} = 0 \quad \text{per} \quad i = 0, 1, \ldots, m-1 \quad \text{ed} \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{34}$$

e per la (8) è

$$\left[\frac{\partial^i}{\partial t^i} F(x, t)\right]_{t=0} = u_i(x) \quad \text{per} \quad i = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{34 bis}$$

Dalle (32), (33), (34) allora segue

$$\left[\frac{\partial^i u(x, t)}{\partial t^i}\right]_{t=0} = \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{\partial^i}{\partial t^i} A^s F(x, t)\right]_{t=0} = u_i(x), \quad i = 0, 1, \ldots, m-1$$

e quindi $u(x, t)$ soddisfa anche alle condizioni iniziali (2).

2. — Nel teorema precedente l'altezza l del campo esistenza di R dipende per la disuguaglianza (5) dalle costanti M e ϱ che compaiono nelle limitazioni delle derivate delle funzioni $a(x, t)$, $f(x, t)$, $u_i(x)$. Ciò comporta una restrizione per il campo di esistenza ed è quindi interessante osservare che tale restrizione può essere superata qualora le funzioni $a(x, t)$, $f(x, t)$, $u_i(x)$ soddisfino a condizioni più restrittive di quelle considerate nel teorema I. Si ha in proposito il seguente teorema.

TEOREMA II. — *Se le funzioni* $a(x, t)$, $f(x, t)$, $u_i(x)$ *sono in* R *di classe* $G_x[\alpha, \varrho, M]$, *con* $\alpha < \frac{m}{n}$, *allora esiste una e una sola funzione* $u(x, t)$, *di classe* $G_x[\alpha, \varrho e^{-1-\alpha}, \Omega]$ *in* R, *con* Ω *costante opportuna, soluzione in* R *del problema di Cauchy* (1), (2). *Tale funzione è la somma della serie* (7) *che è uniformemente convergente in* R.

Notiamo che nel teorema non si è fatta alcuna ipotesi sul valore dell'altezza l e che quindi essa è arbitrariamente grande.

La dimostrazione di tale teorema è completamente analoga a quella del teorema precedente e può essere ottenuta da quella sostituendo α ad $\frac{m}{n}$. Osserviamo che in tal modo si ottiene invece della (27)

$$\left|\frac{\partial^h A^s F(x, t)}{\partial x^h}\right| < M e^l \left(\frac{e^{1+\alpha}}{\varrho}\right)^h (h!)^\alpha \frac{(4\pi n s)^m}{[(ns)!]^{\frac{m}{n}-\alpha}} \left(\frac{n^m e^{m+n+1} M l^m}{m^m \varrho^n}\right)^s$$

e si considera perciò la serie maggiorante

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^m}{[(ns)!]^{\frac{m}{n}-\alpha}} \left(\frac{n^m M l^m e^{m+n+1}}{m^m \varrho^n}\right)^s$$

che risulta convergente indipendentemente dal valore dell'altezza l e delle costanti ϱ, M.

Osserviamo ora che dal teorema II ne segue immediatamente un altro relativo alla striscia S del piano (x, t) definita dalle limitazioni $x_1 \leq x \leq x_2$.

Sia Γ la classe delle funzioni $\varphi(x, t)$ definite in S e tali che fissato comunque un numero positivo l esistano corrispondentemente tre costanti α_l, ϱ_l, M_l con $\alpha_l < \frac{m}{n}$ per cui $\varphi(x, t)$ è di classe $G_x[\alpha_l, \varrho_l, M_l]$ per $x_1 \leq x \leq x_2$ e $|t| \leq l$. Ciò posto si ha:

TEOREMA III. — *Se le funzioni $a(x, t)$, $f(x, t)$, $u_i(x)$ sono di classe Γ esiste una e una sola funzione $u(x, t)$, di classe Γ, soluzione in S del problema di Cauchy* (1), (2). *Tale funzione è somma in S della serie* (7).

Fissato l e posto $R_l \equiv [x_1 \leq x \leq x_2,\ |t| \leq l]$, le funzioni $a(x, t)$, $f(x, t)$, $u_i(x)$ per ipotesi sono in R_l di classe $G_x[\alpha_l, \varrho_l, M_l]$ con $\alpha_l < \frac{m}{n}$. Per il teorema II allora esiste una funzione $u(x, t)$, di classe $G_x[\alpha_l, \varrho_l e^{-1-\alpha}, \Omega_l]$ in R_l, con Ω_l costante opportuna, che è soluzione in R_l del problema di Cauchy (1), (2). Per l'arbitrarietà di l segue che $u(x, t)$ appartiene alla classe Γ ed è soluzione in S del problema di Cauchy (1), (2). Inoltre per il teorema II $u(x, t)$ è somma in R_l della serie (7) e per l'arbitrarietà di l tale serie è convergente ad $u(x, t)$ in tutto S.

Se esiste una funzione di classe Γ, soluzione in R_l del problema di Cauchy considerato, dalla dimostrazione del teorema I segue che essa è necessariamente somma della serie (7). Sussiste quindi l'unicità della soluzione nella classe Γ relativamente al rettangolo R_l e, per l'arbitrarietà di l, relativamente a tutta la striscia S.

3. — Indicato con R_0 il rettangolo $[x_1 \leq x \leq x_2,\ 0 \leq t \leq l]$ dal teorema I si ottiene come immediato corollario il seguente criterio di confronto.

TEOREMA IV. — *Supposto che le funzioni $a(x, t)$, $b(x, t)$, $f(x, t)$, $g(x, t)$, $u_i(x)$, $v_i(x)$, con $i = 0, 1, \dots, m-1$, siano in R_0 di classe $G_x\left[\frac{m}{n}, \varrho, M\right]$ per il teorema I esiste in R_0 la soluzione $u(x, t)$ del problema di Cauchy* (1), (2) *e la soluzione $v(x, t)$ del seguente problema di Cauchy:*

$$\frac{\partial^m v(x, t)}{\partial t^m} + b(x, t)\frac{\partial^n v(x, t)}{\partial x^n} = g(x, t)\,,$$

$$v(x, 0) = v_0(x)\,, \quad \left[\frac{\partial^i v(x, t)}{\partial t^i}\right]_{t=0} = v_i(x)\,, \qquad i = 0, 1, \dots, m-1\,.$$

Se in R_0 si verificano le seguenti disuguaglianze

$$(35)\qquad \left|\frac{\partial^s a(x,t)}{\partial x^s}\right| \leq -\frac{\partial^s b(x,t)}{\partial x^s}, \quad \left|\frac{\partial^s f(x,t)}{\partial x^s}\right| \leq \frac{\partial^s g(x,t)}{\partial x^s}, \quad \left|\frac{d^s u_i(x)}{dx^s}\right| \leq \frac{d^s v_i(x)}{dx^s}, \quad s = 0, 1, \ldots$$

allora è

$$|u(x,t)| \leq v(x,t), \qquad \left|\frac{\partial^s u(x,t)}{\partial x^s}\right| \leq \frac{\partial^s v(x,t)}{\partial x^s}, \quad \text{per} \quad (x,t) \in R_0, \quad s = 0, 1, \ldots.$$

Poniamo

$$(36)\qquad G(x,t) = \sum_{i=0}^{m-1} v_i(x)\frac{t^i}{i!} + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!}\, g(x,\tau)d\tau,$$

ed indichiamo con B il seguente operatore

$$(37)\qquad BG(x,t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!}\,[-b(x,\tau)]\,\frac{\partial^n}{\partial x^n}\,G(x,\tau)d\tau,$$

$$(38)\qquad B^s G(x,t) = B[B^{s-1}G(x,t)], \quad s = 2, 3, \ldots, \qquad B^0 G(x,t) = G(x,t).$$

Per il teorema I è

$$(39)\qquad v(x,t) = \sum_{s=0}^{\infty} B^s G(x,t), \qquad u(x,t) = \sum_{s=0}^{\infty} A^s F(x,t).$$

Dalla (35) e (36) segue che la funzione $G(x, t)$ è dotata di derivate di qualsiasi ordine rispetto ad x, non negative in R_0 e per la (8) è

$$(40)\qquad \left|\frac{\partial^s F(x,t)}{\partial x^s}\right| \leq \frac{\partial^s G(x,t)}{\partial x^s} \quad \text{per} \quad (x,t) \in R_0, \quad s = 0, 1, \ldots.$$

Dalle (37) e (38) segue che anche le funzioni $B^s G(x, t)$, $s = 0, 1, \ldots$, hanno derivate di qualsiasi ordine rispetto ad x non negative in R_0. Tenuto conto che l'operatore B si ottiene dall'operatore A sostituendo nella sua espressione ad $a(x, t)$ la funzione $b(x, t)$, per la (21) e le (35) (40) si ottiene

$$\left|\frac{\partial^h A^s F(x,t)}{\partial x^s}\right| \leq \frac{\partial^h B^s G(x,t)}{\partial x^s} \quad \text{per} \quad (x,t) \in R_0, \quad s = 0, 1, \ldots.$$

Per tale relazione dalla (39) segue il teorema.

4. — Aggiungendo altre ipotesi a quelle formulate per il teorema I concernenti le funzioni $a(x, t)$, $f(x, t)$, $u_i(x)$ la soluzione del problema di Cauchy considerato acquisterà evidentemente ulteriori proprietà oltre quelle stabilite nel teorema I. Si può ad esempio osservare che *se sono soddisfatte le ipotesi del teorema I e se inoltre le funzioni $a(x, t)$, $f(x, t)$ hanno derivate parziali rispetto a t fino all'ordine r continue in R, allora la soluzione $u(x, t)$*

possiede derivate rispetto a t fino all'ordine $m + r$ continue in R. Ciò segue immediatamente dall'espressione in serie di $u(x, t)$ data dalla (7).

Più generalmente ci si può proporre di determinare quale ipotesi devono essere aggiunte a quelle supposte nel teorema I affinchè esista una soluzione del problema di Cauchy (1), (2) appartenente ad una classe prefissata. Consideriamo in particolare il seguente problema proposto recentemente da G. S. Salehov e V. R. Tridlender: *quali sono le ipotesi necessarie e sufficienti affinchè esista una funzione $u(x, t)$, analitica in t, soluzione del problema di Cauchy* (1), (2) *in un intorno del segmento portante i dati* (9)?

Indichiamo con T un campo nel piano complesso che contenga l'intervallo $(-l, l)$ dell'asse reale e sia semplicemente connesso. Sussiste il seguente teorema.

TEOREMA V. — *Siano soddisfatte le ipotesi del teorema I ed inoltre per $x_1 \leq x \leq x_2$ e $t \in T$ le funzioni $a(x, t)$, $f(x, t)$ siano olomorfe rispetto alla variabile complessa t e di classe $G_x\left[\frac{m}{n}, \varrho, M\right]$ rispetto alla variabile reale x. In tali ipotesi la funzione $u(x, t)$, somma della serie* (7) *e soluzione in R del problema di Cauchy* (1), (2), *è olomorfa rispetto alla variabile complessa t per $x_1 \leq x \leq x_2$, $t \in T$* (10).

La funzione $F(x, t)$, definita dalla (8), per ipotesi risulta olomorfa rispetto alla variabile complessa t per $t \in T$ e $x_1 \leq x \leq x_2$ e per tali va-

(9) Memoria citata in (1). Tale quesito è stato chiamato dagli Autori il problema inverso di Cauchy.

(10) Questo teorema estende alcuni precedenti risultati di G. S. SALEHOV (*Sul problema di Cauchy per una classe di equazioni a derivate parziali nel campo delle funzioni arbitrariamente liscie.* « kvestiya Kazan Filial. Akad. Nauk. SSSR Ser. Fis. Mat. Tehn. Nauk. » 1, 63-74 (1948)) di L. V. KUSNETROV (*Soluzione del problema di Cauchy Kowalewsky per alcune equazioni a derivate parziali nel campo delle funzioni « liscie »*, Kazan, Dissertazione, (1950)) di E. A. ASADULLIN (*Ricerche sulle equazioni differenziali normali a derivate parziali,* Kazan, Dissertazione (1950)). Salehov e Kusnetrov hanno studiato il problema di Cauchy (1), (2) supponendo $a(x, t) = \pm t^m$ ed hanno provato che le ipotesi del teorema V, meno la disuguaglianza (5), sono necessarie e sufficienti per l'esistenza di una soluzione analitica rispetto a t nell'intorno del segmento portante i dati. Asadullin ha studiato pure lo stesso problema supponendo $f(x, t) \equiv 0$ e $a(x, t)$ indipendente da t e polinomio in x di grado $q \leq n$; tale Autore ha provato che condizione sufficiente per l'esistenza di una soluzione analitica in t nell'intorno del segmento portante i dati è che le funzioni $u_i(x)$ siano di classe $G_x\left[\frac{m-q}{n-q}, \varrho, M\right]$ con ϱ, M costanti positive arbitrarie.

Il teorema V è solamente un criterio sufficiente e quindi risolve parzialmente il quesito di Salehov e Tridlender. Nel numero successivo sono però svolte alcune considerazioni sulla irriducibilità delle ipotesi supposte nei precedenti teoremi.

Osserviamo infine che nel teorema V è supposto $m \geq n$ ma che tale teorema sussiste pure per $m < n$ se si suppone $a(x, t)$ indipendente da x; ciò segue dal teorema VII.

lori di x, t sono verificate le limitazioni (20). Analogamente per la (4) anche la funzione $AF(x, t)$ è olomorfa rispetto a t per $t \in T$ e $x_1 \leq x \leq x_2$ e così pure la funzione $A^s F(x, t)$, $s = 2, 3, \ldots$. Con lo stesso procedimento seguito nella dimostrazione del teorema I si prova che le limitazioni (27) sussistono anche per $t \in T$, $x_1 \leq x \leq x_2$ e perciò per tali valori di x, t la serie (7) è uniformemente convergente. Per un noto teorema di Weierstrass sulle serie di funzioni olomorfe la somma $u(x, t)$ di tale serie è olomorfa per $t \in T$ e $x_1 \leq x \leq x_2$.

5. — È noto che per il problema di Cauchy

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right]_{t=0} = u_1(x), \quad (x, t) \in R,$$

se $u_0(x)$ è analitica condizione necessaria per l'esistenza di una soluzione è che anche $u_1(x)$ sia analitica ([11]).

Analogamente nel problema del calore

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right]_{t=0} = u_1(x), \quad (x, t) \in R,$$

se $u_0(x)$ è dotata di derivate di qualsiasi ordine può esistere una soluzione solamente se anche $u_1(x)$ è dotata di derivate di qualsiasi ordine ([12]). Proseguendo in tali ricerche allo scopo di chiarire la struttura differenziale delle eventuali soluzioni del problema di Cauchy (1), (2), in una precedente Nota ([13]) è stato mostrato con alcuni esempi che se le funzioni $f(x, t)$, $u_i(x)$ non sono dotate di derivate rispetto ad x di qualsiasi ordine tale soluzione può non esistere. Mostriamo ora che pure se la funzione $a(x, t)$ non è dotata di derivate di qualsiasi ordine rispetto ad x il problema di Cauchy (1), (2) può non ammettere soluzione.

Fissato un numero positivo ε indichiamo con R il rettangolo $|x| \leq 1$, $|t| \leq \varepsilon$. Proviamo che non esiste una soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\frac{\partial^m u(x, t)}{\partial t^m} - (2 + |x| x^{2r-1}) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = x^2, \tag{41}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right]_{t=0} = 0, \tag{42}$$

([11]) Confrontare ad esempio M. PICONE, «Appunti di Analisi Superiore», Napoli, 1940, pag. 668.

([12]) E. HOLMGREM, *Om Cauchys problem vid de lineära partiella differentialekvationerna af 2:dra ordningen*, «Archiv för matematik, astr. ach. fys.» 2, (1905), N. 24.

([13]) C. PUCCI, *Teoremi di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy nella teoria delle equazioni lineari a derivate parziali*, «Rend. Acc. Lincei.» 8, 13, 1952, Nota II, pp. 111-116.

ove m ed r sono numeri interi maggiori di 2. Posto

$$R_1 \equiv [0 \leq x \leq 1,\ |t| \leq \varepsilon], \qquad R_2 \equiv [-1 \leq x \leq 0,\ |t| \leq \varepsilon],$$

per il teorema I esiste una soluzione del problema di Cauchy (41), (42) rispettivamente in R_1 ed in R_2. In R_1 è

$$F(x, t) = x^2 \frac{t^m}{m!},$$

$$AF(x, t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} (2 + x^{2r}) \frac{d^2}{dx^2} x^2 \frac{\tau^m}{m!} d\tau = \frac{t^{2m}}{(2m)!} 2(2 + x^{2r}),$$

ed in generale, considerando l'operatore $\left[(2 + x^{2r}) \frac{d^2}{dx^2}\right]$, si ha

$$A^s F(x, t) = \frac{t^{m(s+1)}}{[m(s+1)]!} \left[(2 + x^{2r}) \frac{d^2}{dx^2}\right]^{s-1} (2 + x^{2r});$$

quindi, per il teorema I, una soluzione in R_1 del problema di Cauchy (41), (42) è

$$u_1(x, t) = x^2 \frac{t^m}{m!} + 2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^{m(s+2)}}{[(s+2)m]!} \left[(2 + x^{2r}) \frac{d^2}{dx^2}\right]^s (2 + x^{2r}) \tag{43}$$

risultando tale serie uniformemente convergente in R_1.

Analogamente in R_2 è

$$F(x, t) = x^2 \frac{t^m}{m!}, \qquad AF(x, t) = \frac{t^{2m}}{(2m)!} 2(2 - x^{2r}),$$

$$A^s F(x, t) = \frac{t^{m(s+1)}}{[m(s+1)]!} 2 \left[(2 - x^{2r}) \frac{d^2}{dx^2}\right]^{s-1} (2 - x^{2r}),$$

ed una soluzione in R_2 per il teorema I è

$$u_2(x, t) = x^2 \frac{t^m}{m!} + 2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^{m(s+2)}}{[m(s+2)]!} \left[(2 - x^{2r}) \frac{d^2}{dx^2}\right]^s (2 - x^{2r}), \tag{44}$$

risultando tale serie uniformemente convergente in R_2. Proviamo che è

$$\left\{\left[(2 - x^{2r}) \frac{d^2}{dx^2}\right]^r (2 - x^{2r})\right\}_{x=0} = -2^r (2r)!. \tag{45}$$

Il primo membro della (45) è somma di espressioni del seguente tipo

$$2 \left[\frac{d^{\lambda_1}(2 - x^{2r})}{dx^{\lambda_1}}\right]_{x=0} \left[\frac{d^{\lambda_2}(2 - x^{2r})}{dx^{\lambda_2}}\right]_{x=0} \cdots \left[\frac{d^{\lambda_r}(2 - x^{2r})}{dx^{\lambda_r}}\right]_{x=0} \tag{46}$$

con

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_r = 2r, \quad \lambda_i \leq 2i \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{47}$$

Essendo

$$\left[\frac{d^{\lambda_i}(2 - x^{2r})}{dx^{\lambda_i}}\right]_{x=0} = 0 \quad \text{per} \quad \lambda_i \neq 0\,, \ \lambda_i \neq 2r\,,$$

per la (47) la (46) non è nulla soltanto per $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{r-1} = 0$, $\lambda_r = 2r$ ed in tal caso essa è $-2^r(2r)!$. Da ciò segue la (45) e si ha quindi evidentemente

$$\left\{\left[(2 + x^{2r})\frac{d^2}{dx^2}\right]^r (2 + x^{2r})\right\}_{x=0} > \left\{\left[(2 - x^{2r})\frac{d^2}{dx^2}\right]^r (2 - x^{2r})\right\}_{x=0}. \tag{48}$$

Essendo poi in generale

$$\left\{\left[(2 + x^{2r})\frac{d^2}{dx^2}\right]^s (2 + x^{2r})\right\}_{x=0} \geq \left\{\left[(2 - x^{2r})\frac{d^2}{dx^2}\right]^s (2 - x^{2r})\right\}_{x=0} \quad \text{per} \quad s = 0, 1, \ldots,$$

dalla (43) e dalla (44) per la (48) risulta

$$u_2(0, t) > u_1(0, t) \quad \text{per} \quad t > 0\,. \tag{49}$$

Per un teorema di M. Picone [14] non esiste più di una soluzione in R_1 ed in R_2 del problema di Cauchy (41), (42); se quindi esistesse una soluzione in R di tale problema essa dovrebbe coincidere in R_1 con $u_1(x, t)$ ed in R_2 con $u_2(x, t)$, ma ciò per la (49) è assurdo.

Notiamo che le ipotesi del teorema I non sono verificate soltanto per quanto riguarda il coefficiente $a(x, t)$, in tal caso $|x|x^{2r-1}$, che nell'origine ha derivate soltanto fino all'ordine $2r - 1$. Essendo r arbitrariamente grande ciò significa che non è possibile nel teorema I ridurre le ipotesi sulla differenziabilità di $a(x, t)$ rispetto ad x supponendo tale funzione dotata solamente di un numero finito di derivate; ciò non è possibile neanche aumentando le ipotesi di tipo differenziale su $u_i(x)$, $f(x, t)$ perchè nell'esempio considerato (40), (41) è $u_i(x) \equiv 0$, $f(x, t) \equiv x^2$.

6. — Il teorema I stabilisce l'esistenza di una soluzione del problema di Cauchy considerato e dà di essa una rappresentazione in serie, la (7). Osserviamo che tale serie fornisce un effettivo metodo pratico per il calcolo approssimato della soluzione; una applicazione di tale metodo è già stata data nella Memoria citata in (2) nell'ipotesi che $a(x, t)$ dipenda solamente da t. Ciò può essere fatto analogamente anche nel caso che $a(x, t)$ dipenda pure da x. Notiamo anche che in alcuni casi la serie (7) si riduce alla somma di un numero finito di termini e quindi una soluzione del problema di

(14) M. Picone, *Nuove determinazioni per gl'integrali delle equazioni lineari a derivate parziali*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 6, 28, 1938, pp. 339-348.

Cauchy è completamente determinata. Si ha in proposito il seguente teorema.

TEOREMA. VI. — *Se $a(x, t)$, $f(x, t)$, $u_i(x)$ con $i = 0, 1, ..., m-1$, sono funzioni continue rispetto a t per $|t| \leq l$ e polinomi in x, $a(x, t)$ di grado minore di n e $f(x, t)$, $u_i(x)$ di grado $\leq g$, con g arbitrario, la funzione*

$$\sum_{s=0}^{g} A^s F(x, t), \tag{50}$$

ove $F(x, t)$ è definita dalla (8) *ed A dalla* (4), *è un polinomio in x di grado $\leq g$, ed è soluzione del problema di Cauchy* (1), (2) *per $|t| \leq l$.*

Osservazione. Notiamo che se le ipotesi del teorema sono verificate per qualsiasi valore di t, cioè $l = +\infty$, la (50) è soluzione in tutto il piano del problema di Cauchy (1), (2).

Dimostrazione. — Le funzioni $a(x, t)$, $f(x, t)$, $u_i(x)$ soddisfano alle ipotesi del teorema I e quindi esiste una soluzione ed essa è la somma della serie (7).

Proviamo che

$$A^s F(x, t) \equiv 0 \quad \text{per} \quad s > g . \tag{51}$$

Per la (8) $F(x, t)$ è un polinomio in x di grado $\leq g$. L'operatore A, definito dalla (4), comporta n operazioni di derivazione rispetto ad x ed il prodotto per $a(x, t)$ polinomio di grado $< n$, e quindi applicando l'operatore A ad un polinomio in x si ottiene un polinomio in x di grado minore. Perciò $AF(x, t)$ è un polinomio in x di grado $\leq g-1$ ed in generale $A^s F(x, t)$, con $s \leq g$, è un polinomio in x di grado $\leq g-s$ e per $s > g$ sussiste la (51).

7. — Nei precedenti teoremi si è sempre supposto che nell'equazione differenziale (1) sia $m \geq n$. Nell'ipotesi che il coefficiente a sia costante dai risultati conseguiti in due precedenti Note [15] segue che i teoremi I, II, III sussistono anche per $m < n$. Più generalmente nell'ipotesi che il coefficiente a dipenda solamente da t si ha il seguente teorema.

TEOREMA VII. — *La funzione $a(t)$ sia continua per $|t| \leq l$ e le funzioni $f(x, t)$, $u_i(x)$, $i = 0, 1, ..., m-1$ siano in $R \equiv [x_1 \leq x \leq x_2, |t| \leq l]$ di classe $G_x\left[\frac{m}{n}, \varrho, L\right]$ con L costante positiva arbitraria e ϱ tale che*

$$n l^m e^m \max_R |a(t)| < m \varrho^n .$$

[15] Nota II citata in [13] e corrispondente Nota I sempre «Rend. Acc. Lincei», 8, 13, 1952, pp. 18-23.

Posto

$$\Omega = L(4\pi n)^m \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{l^m e^m n \max_R |a(t)|}{m \varrho^n} \right)^s s^m \quad [16],$$

esiste una e una sola funzione di classe $G_x\left[\frac{m}{n}, \varrho e^{-\frac{m}{n}}, \Omega\right]$ *in R che è ivi soluzione del problema di Cauchy*

$$\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} + a(x,t)\frac{\partial^n u(t)}{\partial x^n} = f(x,t),$$

$$\left[\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial t^i}\right]_{t=0} = u_i(x), \qquad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Tale funzione è somma della serie (7) *che è uniformemente convergente in R.*

Omettiamo la dimostrazione di tale teorema perchè è sostanzialmente analoga a quella dei teoremi I e II delle due Note citate in [13], [15].

Consideriamo ora il caso che il coefficiente a dipenda da x e nell'equazione differenziale (1) sia $m < n$. Notiamo che i teoremi I, II, III sono falsi se viene soppressa l'ipotesi $m \geq n$; infatti affinchè converga la serie (7) nel caso $m < n$ non solo non è sufficiente l'ipotesi che $a(x,t)$, $f(x,t)$, $u_i(x)$ siano di classe $G_x\left[\frac{m}{n}, \varrho, M\right]$ in R, con ϱ ed M costanti opportune, ma non è neppure sufficiente l'ipotesi che tali funzioni e le loro derivate parziali rispetto ad x di qualsiasi ordine siano equilimitate in R. Ciò si prova considerando ad esempio il seguente problema di Cauchy:

$$(52) \qquad \frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} + e^x \frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n} = e^x, \quad \left[\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial t^i}\right]_{t=0} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Impiegando le notazioni introdotte al n. 1 è

$$F(x,t) = \frac{t^m}{m!} e^x, \qquad AF(x,t) = -\frac{t^{2m}}{(2m)!} e^x \frac{d^n}{dx^n} e^x = -\frac{t^{2m}}{(2m)!} e^{2x},$$

$$A^s F(x,t) = (-1)^s \frac{t^{ms+m}}{(ms+m)!} \left(e^x \frac{d^n}{dx^n}\right)^s e^x = (-1)^s \frac{(s!)^n}{(ms+m)!} e^{sx+s} t^{ms+m},$$
$$s = 0, 1, \dots .$$

Per i precedenti teoremi la soluzione del problema di Cauchy (52) esiste in tutto il piano se $m > n$ ed in un intorno dell'asse $t = 0$ se $m = n$ ed essa è data dalla somma della serie:

$$(53) \qquad \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(s!)^n}{(ms+m)!} e^{sx+s} t^{ms+m}.$$

[16] Tale serie è convergente per la disuguaglianza a cui si è supposto soddisfi ϱ.

Se invece $m < n$, essendo

$$\lim_{s\to\infty} \frac{(s!)^n}{(ms+m)!} = +\infty \quad \text{per} \quad m < n,$$

la serie (53) non è convergente.

L'esempio considerato chiarisce come nello studio del problema di Cauchy (1), (2) si presentano difficoltà nuove se $m < n$ ed $a(x, t)$ dipende effettivamente da x. Tale caso non può essere trattato per estensione dei risultati precedenti. Si pone pertanto la ricerca di nuovi teoremi di esistenza. A questo proposito osserviamo che se pure esiste una soluzione del problema di Cauchy (52), con $m < n$, essa non può essere analitica rispetto a t. Supposto infatti che una tale funzione esista essendo per le (52)

$$\left[\frac{\partial^{m+h} u(x, t)}{\partial t^{m+h}}\right]_{t=0} = -\, e^x \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{\partial^h u(x, t)}{dt^h}\right]_{t=0}, \qquad h = 1, 2, \ldots,$$

$$\left[\frac{\partial^i u(x, t)}{\partial t^i}\right]_{t=0} = 0 \quad \text{per} \quad i = 0, 1, \ldots, m-1, \qquad \left[\frac{\partial^m u(x, t)}{\partial t^m}\right]_{t=0} = e^x,$$

si ha

$$\left[\frac{\partial^h u(x, t)}{\partial t^h}\right]_{t=0} = 0 \quad \text{per} \quad h \neq sm, \; s = 1, 2, \ldots,$$

$$\left[\frac{\partial^{sm} u(x, t)}{\partial t^{sm}}\right]_{t=0} = (-1)^s \left(e^x \frac{d^n}{dx^n}\right)^{s-1} e^x \quad \text{per} \quad s = 1, 2, \ldots,$$

e quindi lo sviluppo di $u(x, t)$ in serie di Mac Laurin rispetto a t sarebbe dato dalla serie (53); ciò è assurdo non essendo tale serie convergente per $m < n$.

8. — Indichiamo ora alcune possibili estensioni dei precedenti risultati.

Sia $(x_1, \ldots, x_r, t)$ un punto generico dello spazio euclideo S_{r+1} ad $r+1$ dimensioni e sia C il cilindro di S_{r+1} definito dalle limitazioni $[|x_i| \leq l_i,\ i = 1, 2, \ldots, r]$. Consideriamo il problema di Cauchy consistente nella ricerca di una funzione $u(x_1, \ldots, x_r, t)$ che soddisfi in C all'equazione differenziale

$$(54) \qquad \sum_{i_1+\ldots+i_r+s\leq m} a_{i_1,\ldots,i_r,s}(x_1, \ldots, x_r, t) \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_r+s} u(x_1, \ldots, x_r, t)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_r^{i_r} \partial t^s} = f(x_1, \ldots, x_r, t)$$

ed alle condizioni iniziali

$$(55) \qquad \left[\frac{\partial^i u(x_1, \ldots, x_r, t)}{\partial t^i}\right]_{t=0} = u_i(x_1, \ldots, x_r), \qquad i = 0, 1, \ldots, m-1,$$

ove le funzioni $a_{i_1,\dots,i_r,s}(x_1, \dots, x_r, t)$ sono dotate di derivate parziali rispetto a t fino all'ordine s continue e $a_{0,\dots,0,m}(x_1, \dots, x_r, t) \equiv 1$, ed inoltre le funzioni $a_{i_1,\dots,i_r,s}(x_1, \dots, x_r, t)$, $f(x_1, \dots, x_r, t)$, $u_i(x_1, \dots, x_r)$ sono dotate di derivate parziali di qualsiasi ordine rispetto alle variabili x_i e tali derivate sono continue in C ed ivi verificano le seguenti limitazioni

$$\left|\frac{\partial^{i_1+\dots+i_r} a}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_r^{i_r}}\right|, \quad \left|\frac{\partial^{i_1+\dots+i_r} f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_r^{i_r}}\right|, \quad \left|\frac{\partial^{i_1+\dots+i_r} u_i}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_r^{i_r}}\right| < L_{i_1,\dots,i_r},$$

con $L_{i_1,\dots,i_r}$ costanti assegnate.

Si può dimostrare, fondandosi sui medesimi procedimenti impiegati nel presente lavoro e nella Memoria citata in ([2]), che se le costanti $L_{i_1,\dots,i_r}$ sono determinate in modo opportuno esiste una soluzione del problema di Cauchy (54), (55) ed essa è dotata di derivate parziali di qualsiasi ordine rispetto alle variabili x_i. Ciò ad esempio è vero se si suppone $L_{i_1,\dots,i_r} = L$ ma si pone la ricerca di ipotesi meno gravose ed aderenti alla natura del problema e cioè presumibilmente di dimostrare il teorema per

$$L_{i_1,\dots,i_r} = M \frac{(i_1 + \dots + i_r)!}{\varrho^{i_1+\dots+i_r}}.$$

Posto

$$F(x_1, \dots, x_r, t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} f(x_1, \dots, x_r, \tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m} \sum_{i_1+\dots+i_r=j} \sum_{s=0}^{m-j} \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k=1}^{s-l} (-1)^{s+l+k} \binom{s-l-1}{k-1} \frac{t^{m-k}}{(m-k)!} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial^{s-l-1} a_{i_1,\dots,i_r,s}(x_1, \dots, x_r, t)}{\partial t^{s-l-1}}\right]_{t=0} \frac{\partial^j u_l(x_1, \dots, x_r)}{\partial x_1^{i_1}, \dots, \partial x_r^{i_r}}$$

ed indicato con B_j un operatore così definito

$$B_j \varphi(x_1, \dots, x_r, t) =$$

$$= \sum_{i_1+\dots+i_r=j} \sum_{s=0}^{w} \sum_{l=0}^{s} (-1)^{s+l+1} \binom{s}{l} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-l-1}}{(m-l-1)!} a_{i,\dots,i_r,s}(x_1, \dots, x_r, \tau) \frac{\partial^j \varphi(x_1, \dots, x_r, \tau)}{\partial x_1^{i_1}, \dots, \partial x_r^{i_r}} d\tau,$$

ove

$$w = \min\left[m-1,\ m - i_1 - \dots - i_r\right],$$

la ricerca proposta consiste nel determinare le costanti $L_{i_1,\dots,i_r}$ in modo che la serie

$$\sum_{=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{m} B_j\right)^{\mu} F(x_1, \dots, x_r, t)$$

sia totalmente convergente. La somma di tale serie è allora la soluzione del problema di Cauchy considerato come si verifica facilmente con lo stesso procedimento seguito nella Memoria citata e nel presente studio·

Indichiamo infine una ulteriore estensione dei precedenti risultati. Sia $\vartheta(x_1, ..., x_r)$ una funzione analitica definita in C e consideriamo il problema di Cauchy che consiste nella ricerca di una funzione $u(x_1, ..., x_r, t)$ che soddisfa in C all'equazione differenziale (54) ed alle condizioni iniziali

$$\left[\frac{\partial^i u(x_1, ..., x_r, t)}{\partial t^i}\right]_{t=\vartheta(x_1, ..., x_r)} = u_i(x_1, ..., x_r), \qquad i = 0, 1, ..., m-1. \tag{56}$$

Una tale ricerca può essere anche svolta sostituendo alla variabile t una nuova variabile τ così definita

$$\tau = t - \vartheta(x_1, ..., x_r);$$

in tale modo, posto

$$v(x_1, ..., x_r, \tau) = u[x_1, ..., x_r, \tau + \vartheta(x_1, ..., x_r)],$$

il problema di Cauchy (54), (56) si riconduce ad un problema di Cauchy nella funzione incognita $v(x_1, ..., x_r, \tau)$ dello stesso tipo del problema (54), (55) già considerato. Il problema di Cauchy (54), (56) può essere studiato anche direttamente senza cambiamento di variabili, con procedimenti analoghi a quelli precedentemente seguiti.

SUI SISTEMI DI CURVE IPERSPAZIALI CHE GODONO DELLA PROPRIETÀ PROIETTIVA O PROSPETTIVA IN PRIMA APPROSSIMAZIONE

Memoria di DAVIDE CARLO DEMARÌA

presentata dal Socio nazionale residente Alessandro TERRACINI
nell'adunanza del 9 Dicembre 1953

Riassunto. — Cfr. l'*Introduzione*.

INTRODUZIONE.

Nella presente Memoria si ricercano i sistemi normali di k equazioni differenziali del terzo ordine che conducono a sistemi ∞^{3k} di curve di un S_{k+1} godenti della così detta « proprietà proiettiva » e « prospettiva » in prima approssimazione, cioè tali che per le ∞^k curve integrali passanti per due punti A e B, infinitamente vicini, le rette tangenti in A e B descrivano rispettivamente due stelle omografiche o prospettive.

Usiamo la locuzione « in prima approssimazione » secondo il significato datole dal Prof. Terracini (¹) e cioè:

Se l'imposizione di una data proprietà geometrica ad un sistema di curve integrali passanti per due punti infinitamente vicini, individuati sopra le curve integrali mediante le ascisse $(x_0, x_0 + h)$ conduce ad una o più equazioni: $A_1 = 0$; $A_2 = 0$; ...; $A_s = 0$ il cui primo membro sia una serie di potenze nelle h, diremo che un particolare sistema gode di tale proprietà « in prima approssimazione », qualora per esso si annulli il coefficiente della minima potenza di h in ciascuna delle s equazioni.

Troviamo in tal modo rispettivamente i sistemi (F) ed i sistemi (G) (particolari sistemi (F) le cui curve integrali sono curve di S_{k+1} appartenenti a un piano).

(¹) Cfr. TERRACINI, *Sobre las ecuaciones diferenciales de tipo* (G) *y de tipo* (F), « Rev. Mat. y Fís. Teór. Universidad de Tucumán », 6, 1948.

Ci è parso inoltre opportuno distinguere i due casi $k = 2$, $k > 2$ trattati rispettivamente nella prima e seconda parte, in quanto per $k = 2$ abbiamo disposto il calcolo delle condizioni differenziali equivalenti all'imposizione della proprietà proiettiva, in modo che possano eventualmente servire in seguito alla ricerca di sistemi di curve godenti della proprietà proiettiva con un grado maggiore di approssimazione.

In tutto il lavoro sottintenderemo l'analicità delle curve considerate.

Parte Prima.

1. — Il sistema normale di equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine:

$$(1.1) \quad \begin{cases} y''' = \varphi(x, y, z;\ y', z';\ y'', z'') \\ z''' = \psi(x, y, z;\ y', z';\ y'', z'') \end{cases}$$

ove φ e ψ sono funzioni delle variabili x, y, z, y', z', y'' e z'', definisce nello spazio un sistema ∞^6 di curve.

Assegnati due punti $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x, y, z)$ non singolari abbastanza vicini, per essi passeranno ∞^2 curve integrali del sistema (1.1) e riterremo ciascuna di esse individuata dalla retta tangente in A, cioè dai valori di y'_0 e z'_0.

Nel presente capitolo ci proponiamo di determinare quali sono i sistemi (1.1) che godono della proprietà proiettiva in prima approssimazione: tuttavia, come si è già avvertito, al principio imposteremo il calcolo in modo tale che possa essere utilizzato per approssimazioni successive.

2. — Occorre dapprima trovare quali siano le equazioni differenziali alle quali conduce l'imposizione della proprietà proiettiva.

Indicando con s e σ i valori assunti dalla y' rispettivamente nei punti A e B, e t, τ quelli assunti da z', sostituiamo per semplicità di linguaggio la corrispondenza proiettiva tra le due stelle di rette tangenti con un'omografia tra piani punteggiati, per le cui coppie di punti corrispondenti chiamiamo rispettivamente s, t σ, τ le coordinate proiettive non omogenee.

Ora affinchè una trasformazione puntuale (analitica) tra i predetti piani in cui siano omologhi i punti $P_0(s_0, t_0)$ $P'_0(\sigma_0, \tau_0)$:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \sigma = \sigma_0 + (\sigma_s)_0(s - s_0) + (\sigma_t)_0(t - t_0) + \\ \quad + \dfrac{1}{2}(\sigma_{ss})_0(s - s_0)^2 + (\sigma_{st})_0(s - s_0)(t - t_0) + \dfrac{1}{2}(\sigma_{tt})_0(t - t_0) + [3] \\ \tau = \tau_0 + (\tau_s)_0(s - s_0) + (\tau_t)_0(t - t_0) + \\ \quad + \dfrac{1}{2}(\tau_{ss})_0(s - s_0)^2 + (\tau_{st})_0(s - s_0)(t - t_0) + \dfrac{1}{2}(\tau_{tt})_0(t - t_0) + [3] \end{cases}$$

sia un'omografia, è notoriamente necessario e sufficiente che qualunque sia il punto P_0 le direzioni caratteristiche da esso uscenti siano indeterminate (²), vale a dire che sussistano le:

$$(2.2)\quad \begin{cases} 2\sigma_s\sigma_t\sigma_{st} = \sigma_{ss}\sigma_t^2 + \sigma_{tt}\sigma_s^2 \\ 2\tau_s\tau_t\tau_{st} = \tau_{ss}\tau_t^2 + \tau_{tt}\tau_s^2 \\ 2\sigma_s\tau_t\tau_{st} + 2\tau_s\sigma_t\tau_{st} - 2\sigma_s\tau_s\tau_{tt} - 2\sigma_t\tau_t\tau_{ss} - \tau_s^2\sigma_{tt} - \tau_t^2\sigma_{ss} + 2\tau_s\tau_t\sigma_{st} = 0 \\ 2\sigma_s\tau_t\sigma_{st} + 2\tau_s\sigma_t\sigma_{st} - 2\sigma_s\tau_s\sigma_{tt} - 2\sigma_t\tau_t\sigma_{ss} - \sigma_s^2\tau_{tt} - \sigma_t^2\tau_{ss} + 2\sigma_s\sigma_t\tau_{st} = 0 . \end{cases}$$

3. — Sia la (3.1) $\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$ una curva soddisfacente alle condizioni del § 1, f e g saranno funzioni oltre che di x anche dei valori iniziali e di s, t, α, β.

Si potrà perciò scrivere:

$$(3.2)\quad \begin{aligned} y &= y_0 + hs + \frac{1}{2!} h^2\alpha + \frac{1}{3!} h^3\varphi + \frac{1}{4!} h^4 c + O(h^5) \\ z &= z_0 + ht + \frac{1}{2!} h^2\beta + \frac{1}{3!} h^3\psi + \frac{1}{4!} h^4\gamma + O(h^5) \end{aligned}$$

ove

$$h = x - x_0,\ s = y'_0,\ \alpha = y''_0,\ \varphi = y'''_0,\ c = y_0^{IV};$$
$$t = z'_0,\ \beta = z''_0,\ \psi = z'''_0,\ \gamma = z_0^{IV}.$$

Poichè una curva del sistema (1.1) è fissata allorchè sono dati i punti A, B e s, t; α e β non sono variabili indipendenti, ma devono essere considerate come funzioni implicite di s e t, definite dalle

$$(3.3)\quad \begin{cases} y = f[h, s, t, \alpha(s, t), \beta(s, t)] \\ z = g[h, s, t, \alpha(s, t), \beta(s, t)] . \end{cases}$$

Derivando totalmente nel punto B rispetto ad s e t, e ponendo:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = f_1,\ \frac{\partial f}{\partial t} = f^2,\ \text{ecc.}; \qquad (i, k) = f_i g_k - f_k g_i$$

si ottiene:

$$(3.4)\quad \frac{\partial\alpha}{\partial s} = \frac{(4, 1)}{(3, 4)};\ \frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{(4, 2)}{(3, 4)};\ \frac{\partial\beta}{\partial s} = \frac{(1, 3)}{(3, 4)};\ \frac{\partial\beta}{\partial t} = \frac{(2, 3)}{(3, 4)} .$$

(²) Cfr. BORŮVKA, *Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs.* « Publ. Faculté des Sciences Un. Masaryk Brno », n. 72 e 85.

e finalmente, indicando con l'asterisco derivata totale:

$$(3.5)\qquad (3,4)F_i^* = (3,4)F_i + (4,i)F_3 + (i,3)F_4 \qquad (i = 1, 2)$$

ove F è una qualunque funzione delle x, s, t, α, β e le derivate s'intendono calcolate nel punto $B(x.\ y,\ z)$.

Introduciamo gli operatori:

$$(3.6)\qquad \Phi^i(F) = (3,4)F_i^*\,; \qquad \Phi^{ij}(F) = (3,4)^3 F_{ij}^{**} \qquad (i, j = 1, 2)$$

derivando totalmente la prima delle (3.6) si ricava:

$$[\Phi^i(F)]_j^* = (3,4)_j^* F_i^* + (3,4) F_{ij}^{**}$$

donde:

$$(3.8)\qquad \Phi^{ij}(F) = (3,4)^3 F_{ij}^{**} = (3,4)\Phi^j[\Phi^i(F)] - \Phi^j(3,4)\Phi^i(F) \quad (i, j = 1, 2).$$

Facendo i calcoli si ottiene:

$$(3.9)\qquad \left\{\begin{aligned}
(3,4) &= \frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{12}(\varphi_\alpha + \psi_\beta) + \frac{h^6}{144}(4\varphi_\alpha\psi_\beta - 4\psi_\alpha\varphi \ + 3\gamma_\beta + 3c_\alpha) + O(h^7)\\
(4,1) &= -\frac{h^3}{2} - \frac{h^4}{6}\psi_\beta - \frac{h^5}{24}(2\varphi_s + \gamma_\beta) + O(h^6)\\
(1,3) &= \frac{h^4}{6}\psi_\alpha + \frac{h^5}{24}(\gamma_\alpha - 2\psi_s) + O(h^6)\\
\Phi^1(\sigma) &= -\frac{h^4}{4} - \frac{h^5}{12}(2\varphi_\alpha + \psi_\beta) + \frac{h^6}{144}(6\varphi_s - 9c_\alpha - 3\gamma_\beta +\\
&\qquad + 8\varphi_\beta\psi_\alpha - 8\varphi_\alpha\psi_\beta) + O(h^7)\\
\Phi^1(\tau) &= -\frac{h^5}{12}\psi_\alpha + \frac{h^6}{24}(\psi_s - \gamma_\alpha) + O(h^7)\\
\Phi^1[(3,4)] &= -\frac{h^8}{24}(\varphi_{\alpha\alpha} + \psi_{\alpha\beta}) + \frac{h^9}{288}(6\varphi_{\alpha s} + 6\psi_{\beta s} - 3\gamma_{\alpha\beta} - 3c_{\alpha\alpha} -\\
&\qquad - 4\varphi_\alpha\psi_{\alpha\beta} + 4\varphi_\beta\psi_{\alpha\alpha} + 4\psi_\alpha\psi_{\beta\beta} - 4\psi_\beta\psi_{\alpha\beta} + 8\psi_\alpha\varphi_{\alpha\beta} - 8\psi_\beta\varphi_{\alpha\alpha}) + O(h^{10})\\
\Phi^{11}(\sigma) &= \frac{h^{12}}{96}\varphi_{\alpha\alpha} + \frac{h^{13}}{576}(-6\varphi_{\alpha s} + 3c_{\alpha\alpha} - 2\varphi_\beta\psi_{\alpha\alpha} - 4\psi_\alpha\varphi_{\alpha\beta} +\\
&\qquad + 6\psi_\beta\varphi_{\alpha\alpha}) + O(h^{14})\\
\Phi^{12}(\sigma) &= \frac{h^{12}}{96}\varphi_{\alpha\beta} + \frac{h^{13}}{576}(-3\varphi_{\beta s} - 3\varphi_{\alpha t} + 3c_{\alpha\beta} - 2\psi_\alpha\varphi_{\beta\beta} - 2\varphi_\beta\psi_{\alpha\beta} -\\
&\qquad - 2\varphi_\beta\varphi_{\alpha\alpha} + 2\varphi_\alpha\varphi_{\alpha\beta} + 4\psi_\beta\varphi_{\alpha\beta}) + O(h^{14})\\
\Phi^{11}(\tau) &= \frac{h^{12}}{96}\psi_{\alpha\alpha} + \frac{h^{13}}{576}(-6\psi_{\alpha s} + 3\gamma_{\alpha\alpha} + 2\varphi_\alpha\psi_{\alpha\alpha} - 2\psi_\alpha\varphi_{\alpha\alpha} - 4\psi_\alpha\psi_{\alpha\beta} +\\
&\qquad + 4\psi_\beta\psi_{\alpha\alpha}) + O(h^{14})\,.
\end{aligned}\right.$$

Scambiando tra loro le coppie di indici 1, 2; 3, 4 e le seguenti coppie di lettere f, g; s, t; α, β; φ, ψ; c, γ; si potrebbero facilmente avere $\Phi^2(\sigma)$, $\Phi^2(\tau)$ ecc. (3).

Trasformando ora il sistema (2.2) (e più precisamente limitandoci alla prima e alla quarta delle equazioni che lo costituiscono, dalle quali le altre due si ottengono mediante i sopraccennati scambi di indici) ed utilizzando le (3.9), le già citate prima e quarta fra le (2.2) diventano rispettivamente:

$$(3.10) \qquad \frac{1}{1536}\left\{h^{20}\psi_{\alpha\alpha} + \frac{h^{21}}{6}\left[-6\varphi_{\beta t} + 3c_{\beta\beta} + \varphi_{\beta\beta}(10\psi_\beta + 8\varphi_\alpha) - 2\varphi_\beta(\psi_{\beta\beta} + 4\varphi_{\alpha\beta})\right]\right\} + O(h^{22}) = 0$$

$$\frac{1}{1536}\left\{h^{20}(2\varphi_{\alpha\beta} - \psi_{\beta\beta}) + \frac{h^{21}}{6}\left[6c_{\alpha\beta} - 3y_{\beta\beta} - 6\varphi_{\beta s} - 6\psi_{\alpha t} + 6\psi_{\beta t} + \varphi_\alpha(16\varphi_{\alpha\beta} - 14\psi_{\beta\beta}) + \varphi_\beta(4\psi_{\alpha\beta} - 8\varphi_{\alpha\alpha}) - 6\psi_\alpha\varphi_{\beta\beta} + \psi_\beta(20\varphi_{\alpha\beta} - 4\psi_{\beta\beta})\right]\right\} + O(h^{22}) = 0 .$$

Perchè valga la proprietà proiettiva in prima approssimazione nel significato datole dal Terracini devono essere annullati i coefficienti di h^{20} nelle quattro equazioni considerate, cioè:

$$(3.11) \qquad \psi_{\alpha\alpha} = 0 ; \qquad \varphi_{\beta\beta} = 0 ; \qquad 2\varphi_{\alpha\beta} = \psi_{\beta\beta} ; \qquad 2\psi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\alpha} .$$

Si verifica pure che, annullati i coefficienti di h^{20}, vengono automaticamente annullati quelli di h^{21}, cosicchè nello studio della seconda approssimazione sarebbero da annullare i coefficienti di h^{22}, dato che tale condizione non è conseguenza delle precedenti.

4. — Il sistema di equazioni differenziali nelle funzioni φ e ψ delle variabili α, β si integra immediatamente nelle:

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \varphi = A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\alpha + D\beta + E \\ \psi = B\beta^2 + A\alpha\beta + C'\alpha + D'\beta + E' \end{cases}$$

ove A, B, C, D, E, C', D', E' sono delle costanti.

Possiamo pertanto concludere che:

Condizione necessaria e sufficiente, perchè un sistema normale di due equazioni differenziali del terz'ordine (1.1) *goda della proprietà proiettiva*

---

(3) Delle formule qui riportate avremo occasione di servirci anche in altro lavoro.

in prima approssimazione è che esso sia del seguente tipo:

$$(4.2)\qquad \begin{cases} y''' = Ay''^2 + By''z'' + Cy'' + Dz'' + E \\ z''' = Bz''^2 + Ay''z'' + C'y'' + D'z'' + E' \end{cases}$$

ove $A, B, C, D, E, C', D', E'$ sono funzioni delle variabili: x, y, z, y', z'.

Il tipo del sistema (4.2) *coincide con quello dei sistemi* (F) (4).

5. — Prima di passare allo studio della proprietà prospettiva, consideriamo ora i sistemi (1.1) che godono unicamente della seguente proprietà (I):

Le coppie di rette tangenti corrispondenti, alle ∞^2 curve integrali passanti per $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x, y, z)$ siano incidenti.

Mantenendo le precedenti notazioni si ottiene come condizione di incidenza tra le due rette tangenti:

$$(5.1)\qquad \begin{vmatrix} \sigma - s & y - y_0 + sx_0 - \sigma x \\ \tau - t & z - z_0 + tx_0 - \tau x \end{vmatrix} = 0$$

e sostituendo:

$$(5.2)\qquad \frac{h^4}{12}(\beta\varphi - \alpha\psi) + O(h^5) = 0\,; \qquad \text{e cioè} \quad \frac{y'''}{y''} = \frac{z'''}{z''}\,.$$

Integrando si ha:

$$(5.3)\qquad y = Az + Bx + C \qquad (A, B, C \text{ costanti}).$$

Pertanto i sistemi che godono della proprieta (I) sono sistemi di curve piane, e perciò tale proprietà vale per essi in senso finito.

Dalla (5. 2) si ricava che:

Condizione necessaria e sufficiente, perchè un sistema (1. 1) *goda della proprietà* (I), *è che esso sia del tipo:*

$$(5.4)\qquad \begin{cases} y''' = y''\, A(x, y, z, y', z', y'', z'') \\ z''' = z''\, A(x, y, z, y', z', y'', z'')\,. \end{cases}$$

6. — Osserviamo innanzitutto che la proprietà (I) insieme con la proprietà proiettiva equivale alla proprietà prospettiva.

Riunendo le condizioni trovate per la proprietà proiettiva e la proprietà (I) si ha che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè le curve integrali del sistema (1.1) *godano della proprietà prospettiva in prima approssimazione*

(4) Cfr. TERRACINI, *Sobre algunos sistemas de ecuaciones diferenciales de tercer orden*, « Anais Ac. Brasileira de Ciencias », 16, 1944.

è che esso sia del tipo:

$$(6.1)\qquad \begin{cases} y''' = y''\,(Ay'' + Bz'' + C) \\ z''' = z''\,(Ay'' + Bz'' + C) \end{cases}$$

ove A, B, C sono funzioni di $x, y, z; y', z'$.

Questo tipo di sistema generalizza l'equazione (G) di Terracini (5) *ed è esso pure manifestamente invariante per trasformazioni proiettive.*

7. — Tra i sistemi (4.2) di tipo (F), quelli con $E \equiv E' \equiv 0$ si particolarizzano per speciali proprietà. Fra essi sono ovviamente i sistemi di tipo (G).

Noi mostreremo che questo tipo è invariante per trasformazioni omografiche, provando che lo si può caratterizzare rispetto al tipo (F) generale mediante una proprietà proiettiva.

Mentre vi è soltanto un sistema ∞^3 di quadriche (coni di vertice P) contenenti gli ∞^1 E_3 delle curve integrali del sistema F generale, passanti per un E_1 (Pa) generico con piano osculatore fisso α, tale sistema di quadriche diventa ∞^4 per il tipo F con $E \equiv E' \equiv 0$.

Siano:

$$(7.1)\qquad \begin{cases} Y = sX + \dfrac{k\beta}{2} X^2 + \dfrac{\varphi}{6} X^3 \qquad & X = x - x_0\,; \quad Y = y - y_0\,; \\[2ex] Z = tX + \dfrac{\beta}{2} X^2 + \dfrac{\psi}{6} X^3 \qquad & Z = z - z_0\,; \quad \alpha = k\beta \end{cases}$$

gli ∞^1 E_3 nelle condizioni predette e

$$(7.2)\qquad LX^2 + MY^2 + NZ^2 + 2PXY + 2QXZ + 2YZ + 2RX + 2SY + 2TZ = 0$$

l'equazione di una quadrica generica per O.

Sostituendo le (7.1) nelle (7.2) e annullando i coefficienti di X, X^2, X^3 otteniamo, tenendo conto delle (4.2):

$$(7.3)\qquad \begin{cases} 2R + 2sS + 2tT = 0 \\ L + Ms^2 + Nt^2 + 2Ps + 2Qt + 2st + \beta(Sk + T) = 0 \\ \beta\left[Mks + Nt + Pk + Q + s + kt + \dfrac{1}{3} S(Ck + D) + \dfrac{1}{3}(C' + D'k)\right] + \\ \qquad + SE + TE' + \dfrac{\beta^2}{3}(Sk + T)(Ak + B) = 0 \end{cases}$$

(5) Vedi: l. c. (1).

che equivalgono alle seguenti condizioni:

$$(7.4)\quad \begin{cases} Sk + T = 0 \\ SE + TE' = 0 \\ Ss + Tt + R = 0 \\ Mks + Nt + Pk + Q + s + kt + \frac{1}{3} S(Ck + D) + \frac{1}{3} T(C' + D'k) = 0 \\ L + Ms^2 + Nt^2 + 2Ps + 2Qt + 2st = 0. \end{cases}$$

Osserviamo incidentalmente che, nel caso generale, le prime tre equazioni dànno $S = T = R = 0$, e pertanto le quadriche sono coni di vertice O; e dalle ultime due si può ricavare Q, L in funzione di M, N e P.

Ora, se $E \equiv E' \equiv 0$ le cinque equazioni (7.4) si riducono a quattro. e perciò, potendosi facilmente ricavare T, R, Q, L in funzione di S, M, N e P, avremo ∞^4 quadriche invece degli ∞^3 coni del caso generale e viceversa.

Per ottenere un'altra proprietà dei particolari sistemi (F) in esame calcoliamo nel punto P la torsione delle ∞^1 curve di un sistema di tipo (F), uscenti da un dato $E_1(Pa)$ con il piano osculatore α fisso, interpretando x, y, z come coordinate cartesiane non omogenee ortogonali.

Supponendo che P coincida con l'origine ed a con l'asse x, (a questo caso possiamo sempre ridurci mediante un opportuno movimento, tenendo inoltre conto che il tipo (F) è invariante per trasformazioni topologiche e che il tipo (F) con $E \equiv E' \equiv 0$ per trasformazioni proiettive), si ha $y' = 0$, $z' = 0$; fissiamo il piano osculatore col porre $y'' = kz''$.

La torsione è data da:

$$(7.5)\qquad T = -\frac{z''^2(kC' + kD' - kC - D) + z''(kE' - E)}{(1 + k)z''^2}$$

pertanto se $E \equiv E' \equiv 0$ si ottiene:

$$(7.6)\qquad T = -\frac{kC' + kD' - kC - D}{l + k} = \text{costante}.$$

Quindi: *i sistemi di tipo (F) con $E \equiv E' \equiv 0$, godono altresì della seguente proprietà, che li caratterizza entro il tipo (F) generale:*

Le loro ∞^1 curve integrali passanti per un $E_1(Pa)$ generico con un dato piano osculatore α, hanno in P tutte la stessa torsione.

Parte Seconda.

8. — Il sistema normale di k equazioni differenziali ordinarie del terz'ordine:

$$(8.1)\quad \begin{cases} y^{(1)'''} = \varphi^{(1)}(x, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}; y^{(1)'}, y^{(2)'}, \ldots, y^{(k)'}; y^{(1)''}, y^{(2)''}, \ldots, y^{(k)''}) \\ y^{(2)'''} = \varphi^{(2)}(x, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}; y^{(1)'}, y^{(2)'}, \ldots, y^{(k)'}; y^{(1)''}, y^{(2)''}, \ldots, y^{(k)''}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(k)'''} = \varphi^{(k)}(x, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}; y^{(1)'}, y^{(2)'}, \ldots, y^{(k)'}; y^{(1)''}, y^{(2)''}, \ldots, y^{(k)''}) \end{cases}$$

nelle k funzioni incognite $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(h)}$, ove le $\varphi^{(i)}$ sono funzioni delle variabili: $x, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}; y^{(1)'}, y^{(2)'}, \ldots, y^{(k)'}; y^{(1)''}, y^{(2)''}, \ldots, y^{(k)''}$; rappresenta un sistema ∞^{3h} di curve in un S_{k+1}.

Vogliamo trovare tra i sistemi (8.1) il tipo che goda della proprietà proiettiva in prima approssimazione.

Dati due punti infinitamente vicini $A(x_0, y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, \ldots, y_0^{(k)})$ $B(x, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(h)})$ passano per essi ∞^h curve integrali del sistema (8.1), che si possono individuare fissando in A la retta tangente.

Operando analogamente alla parte prima § 2 si vede facilmente, ponendo

$$y_0^{(i)} = s_i\,; \qquad y^{(i)} = \sigma^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

che vi deve essere una corrispondenza omografica tra i punti dei due S_k di coordinate proiettive non omogenee rispettivamente $s_1, s_2, \ldots, s_k$; $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \ldots, \sigma^{(k)}$.

La più generale trasformazione puntuale (analitica) tra quei due S_k in cui si corrispondono $P'(\sigma_0^{(1)}, \sigma_0^{(2)}, \ldots, \sigma_0^{(k)})$ $P(s_{10}, s_{20}, \ldots, s_{k0})$, è:

$$(8.2)\quad \begin{cases} \sigma^{(1)} = \sigma_0^{(1)} + \sum_1^k{}_i [\sigma_i^{(1)}]_0(s_i - s_{i0}) + \frac{1}{2}\sum_1^k{}_{ij} [\sigma_{ij}^{(1)}]_0(s_i - s_{i0})(s_j - s_{j0}) + [3] \\ \sigma^{(2)} = \sigma_0^{(2)} + \sum_1^k{}_i [\sigma_i^{(2)}]_0(s_i - s_{i0}) + \frac{1}{2}\sum_1^k{}_{ij} [\sigma_{ij}^{(2)}]_0(s_i - s_{i0})(s_j - s_{j0}) + [3] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma^{(k)} = \sigma_0^{(k)} + \sum_1^k{}_i [\sigma_i^{(k)}]_0(s_i - s_{i0}) + \frac{1}{2}\sum_1^k{}_{ij} [\sigma_{ij}^{(k)}]_0(s_i - s_{i0})(s_j - s_{j0}) + [3] \end{cases}$$

ove con $\sigma_i^{(l)}$ si è indicato $\dfrac{\partial\sigma^{(l)}}{\partial s_i}$.

Dato che noi ci limitiamo alla prima approssimazione, anticipando il risultato di calcoli successivi — vedi la (9.7) —, possiamo porre $\sigma_i^{(i)} = -1$

e $\sigma_i^{(l)} = 0 \ (i \neq l)$. In tal modo le (8.2) assumono la più semplice forma:

$$
(8.3) \quad \begin{cases}
\sigma^{(1)} = \sigma_0^{(1)} - (s_1 - s_{10}) + \dfrac{1}{2} \sum_{1}^{k}{}_{ij} \, [\sigma_{ij}^{(1)}]_0 (s_i - s_{i0})(s_j - s_{j0}) + [3] \\
\sigma^{(2)} = \sigma_0^{(2)} - (s_2 - s_{20}) + \dfrac{1}{2} \sum_{1}^{k}{}_{ij} \, [\sigma_{ij}^{(2)}]_0 (s_i - s_{i0})(s_j - s_{j0}) + [3] \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sigma^{(k)} = \sigma_0^{(k)} - (s_k - s_{k0}) + \dfrac{1}{2} \sum_{1}^{k}{}_{ij} \, [\sigma_{ij}^{(k)}]_0 (s_i - s_{i0})(s_j - s_{j0}) + [3].
\end{cases}
$$

Una condizione necessaria e sufficiente, perchè la (8.3) sia un'omografia, è che in ogni punto le direzioni caratteristiche siano indeterminate [6]; il che conduce al seguente sistema di equazioni alle derivate parziali (effettivamente non tutte le equazioni sono tra loro indipendenti, ma in tal modo il sistema ha forma simmetrica rispetto a tutti gli indici):

$$
(8.4) \quad \begin{cases}
\sigma_{lm}^{(i)} = 0 & \text{se} \quad i \neq l; \ i \neq m \quad (i, l, m = 1, 2, \ldots, k) \\
2\sigma_{il}^{(l)} = \sigma_{ii}^{(i)} & \text{se} \quad i \neq l .
\end{cases}
$$

9. — Sia $y^{(l)} = f^{(l)}(x)$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$ una curva soddisfacente alle condizioni del § 8. le $y^{(l)}$ saranno funzioni non solo di x, ma anche dei valori iniziali.

$$
(9.1) \quad \begin{aligned}
y^{(1)} &= y_0^{(1)} + hs_1 + \frac{1}{2} h^2 \alpha^{(1)} + \frac{1}{6} h^3 \varphi^{(1)} + O(h^4) \\
y^{(2)} &= y_0^{(2)} + hs_2 + \frac{1}{2} h^2 \alpha^{(2)} + \frac{1}{6} h^3 \varphi^{(2)} + O(h^4) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y^{(k)} &= y_0^{(k)} + hs_k + \frac{1}{2} h^2 \alpha^{(k)} + \frac{1}{6} h^3 \varphi^{(k)} + O(h^4)
\end{aligned}
$$

in cui

$$
h = x - x_0; \quad s_l = \left(\frac{dy^{(l)}}{dx}\right)_0; \quad \alpha^{(l)} = \left(\frac{d^2 y^{(l)}}{dx^2}\right)_0; \quad \varphi^{(l)} = \left(\frac{d^3 y^{(l)}}{dx^3}\right)_0.
$$

Le $\alpha^{(l)}$ non sono variabili indipendenti, ma funzioni implicite delle s_i, in quanto, fissati i due punti A, B, le ∞^k curve integrali passanti per essi sono individuate dalle s_i.

---

[6] Cfr. CREANGĂ, *Sulla trasformazione degli intorni del 2° ordine di due punti corrispondenti, nelle corrispondenze puntuali fra due spazi euclidei*, « Rend. Sem. Matematico », Roma, serie V, vol. 1; VILLA, *Sulle direzioni caratteristiche di una trasformazione puntuale*, « Mem. Acc. Scienze Bologna », IX, 10, 1942-43.

Procedendo analogamente al § 3 della parte prima e calcolando tutte le derivate nel punto B si ottiene:

$$\frac{\partial \alpha^{(i)}}{\partial s_l} = \alpha_l^{(i)} = \tag{9.2}$$

$$= -\frac{\partial(f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(k)})}{\partial(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(i-1)}, s_l, \alpha^{(i+1)}, \dots, \alpha^{(k)})} : \frac{\partial(f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(k)})}{\partial(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(k)})} = -\frac{J_l^{(i)}}{J}$$

$$(i = 1, 2, \dots, k),$$

e se F è una qualunque funzione delle x, $\alpha^{(i)}$, s_i si ha, indicando con l'asterisco derivata totale e ponendo $\frac{\partial F}{\partial \alpha^{(i)}} = F_{(i)}$, $\frac{\partial F}{\partial s_i} = F_i$:

$$(F_i^*)_B = F_i + \sum_1^k {}_j F_{(j)}\alpha_i^{(j)} . \tag{9.3}$$

Introducendo gli operatori:

$$\Phi^i(F) = JF_i^* ; \; \Phi^{ij}(F) = J^3 F_{ij}^{**} \tag{9.4}$$

si ha immediatamente:

$$\begin{aligned} \Phi^i(F) &= JF_i - \sum_1^k {}_l F_{(l)} J_i^{(l)} \qquad (i, j = 1, 2, \dots, k) \\ \Phi^{ij}(F) &= J\Phi^j[\Phi^i(F)] - \Phi^j(J)\Phi^i(F) . \end{aligned} \tag{9.5}$$

Facendo i calcoli si ottiene: $(i, j, l = 1, 2, \dots, k)$

$$\begin{aligned}
J &= \frac{h^{2k}}{2^k} + \frac{h^{2k+1}}{3.2^k} \sum_1^k {}_l \varphi_{(l)}^{(l)} + O(h^{2k+2}) \\
J_i^{(i)} &= \frac{h^{2k-1}}{2^{k-1}} + \frac{h^{2k}}{3.2^{k-1}} \left(\sum_1^k {}_l \varphi_{(l)}^{(l)} - \varphi_{(i)}^{(i)} \right) + O(h^{2k+1}) \\
J_l^{(i)} &= -\frac{h^{2k}}{3.2^{k-1}} \varphi_{(l)}^{(i)} + O(h^{2k+1}) \qquad (i \neq l) \\
\Phi^i(\sigma^{(i)}) &= -\frac{1}{2^k} h^{2k} - \frac{1}{3.2^k} h^{2k+1} \left(\sum_1^k {}_p \varphi_{(p)}^{(p)} + \varphi_{(i)}^{(i)} \right) + O(h^{2k+2}) \\
\Phi^i(\sigma^{(l)}) &= -\frac{1}{3.2^k} h^{2k+1} \varphi_{(i)}^{(l)} + O(h^{2k+2}) \qquad (i \neq l) \\
\Phi^i(J) &= -\frac{1}{3.2^{k-1}} h^{4k} \sum_1^k {}_l \varphi_{(p)(i)}^{(p)} + O(h^{4k+1}) \\
\Phi^{ij}(\sigma^{(l)}) &= \frac{1}{3.2^{3k-1}} h^{6k} \varphi_{(i)(j)}^{(l)} + O(h^{6k+1})
\end{aligned} \tag{9.6}$$

Dalla quarta e quinta delle (9.6) e dalla posizione (9.4) si ha pertanto immediatamente:

$$\text{(9.7)}\qquad \begin{aligned} \sigma_i^{(i)*} &= \Phi^i(\sigma^{(i)})/J = -1 + O(h) \\ \sigma_i^{(l)*} &= \Phi^i(\sigma^{(l)})/J = O(h) \end{aligned}$$

risultato di cui ci siamo serviti nel § 8.

10. — Torniamo alle equazioni del sistema (8.4): moltiplicandole per J^3 ed operandovi le opportune sostituzioni a norma delle (9.6) si ottiene:

$$\text{(10.1)}\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{3\cdot 2^{3k-1}}\, h^{6k}\varphi^{(i)}_{(l)(m)} + O(h^{6k+1}) = 0 \quad \text{se} \quad i \neq l,\, i \neq m \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i, l, m = 1, 2, \ldots, k) \\ \dfrac{1}{3\cdot 2^{3k-1}}\, h^{6k}(\varphi^{(i)}_{(i)(i)} - 2\varphi^{(l)}_{(i)(l)}) + O(h^{6k+1}) = 0 \quad \text{se} \quad i \neq l\,. \end{cases}$$

Annullando ora il coefficiente di h^{6k} si ha il seguente sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali:

$$\text{(10.2)}\qquad \begin{cases} \varphi^{(i)}_{(l)(m)} = 0 & i \neq l;\ i \neq m \\ \varphi^{(i)}_{(i)(i)} = 2\varphi^{(l)}_{(i)(l)} & i \neq l\,. \end{cases}$$

Derivando rispetto ad $\alpha^{(n)}$ si ottiene:

$$\text{(10.3)}\qquad \varphi^{(i)}_{(l)(m)(n)} = 0 \qquad (i, l, m, n = 1, 2, \ldots, k)\,.$$

La più generale soluzione del sistema (10.3) è dato dal seguente sistema di funzioni:

$$\text{(10.4)}\qquad \varphi^{(i)} = \sum_{1}^{k}{}_{lm} A^{(i)}_{lm}\alpha^{(l)}\alpha^{(m)} + \sum_{1}^{k}{}_{l} B^{(i)}_{l}\alpha^{(l)} + C^{(i)}$$

ove $A^{(i)}_{lm}$, $B^{(i)}_{l}$, $C^{(i)}$ sono delle costanti.

Pertanto, sostituendo, si ottiene che la più generale soluzione del sistema di equazioni differenziali (10.2) è:

$$\text{(10.5)}\qquad \varphi^{(i)} = \alpha^{(i)}\sum_{1}^{k}{}_{l} A_l\alpha^{(l)} + \sum_{1}^{k}{}_{l} B^{(i)}_{l}\alpha^{(l)} + C^{(i)}\,.$$

Concludendo, abbiamo ottenuto il seguente risultato:

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè le curve integrali del sistema (8.1) *godano della proprietà proiettiva in prima approssimazione, è*

che esso sia del tipo:

$$
(10.6)\quad \begin{cases} y^{(1)'''} = y^{(1)''} \sum_{1}^{k} {}_l A_l y^{(l)''} + \sum_{1}^{k} {}_l B_l^{(1)} y^{(l)''} + C^{(1)} \\ y^{(2)'''} = y^{(2)''} \sum_{1}^{k} {}_l A_l y^{(l)''} + \sum_{1}^{k} {}_l B_l^{(2)} y^{(l)''} + C^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(k)'''} = y^{(k)''} \sum_{1}^{k} {}_l A_l y^{(l)''} + \sum_{1}^{k} {}_l B_l^{(k)} y^{(l)''} + C^{(k)} \end{cases}
$$

ove A_l, $B_l^{(i)}$, $C^{(i)}$ *sono funzioni di* $x, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(k)}; y^{(1)'}, y^{(2)'}, \dots, y^{(k)'}$.

Detto tipo è eguale a quello dei sistemi (*F*) *di Terracini* (7).

11. — Passiamo anche ora a caratterizzare il tipo del sistema (8.1) che goda della proprietà (I), cioè che le coppie di rette tangenti corrispondenti nei punti infinitamente vicini A, B siano incidenti in un punto.

Potremo seguire il metodo usato nel § 5 della parte prima, ma preferiamo procedere più brevemente in questo modo (8).

Consideriamo l'S_d ($d \leq 3$) congiungente la retta tangente nel punto A e la retta tangente nel punto B; quando B tende ad A, esso tende allo $S(3)$ osculatore in A alla curva.

Poichè noi vogliamo che le due rette tangenti siano complanari lo $S(3)$ osculatore deve ridursi ad un piano.

Segue pertanto immediatamente che le curve di un sistema (1) sono piane e che perciò il punto derivato terzo è combinazione lineare del punto, del punto derivato primo e del punto derivato secondo.

$$
(11.1)\qquad P''' = A(x)P + B(x)P' + C(x)P''
$$

e cioè:

$$
\left\| \begin{matrix} y^{(1)''} & y^{(2)''} & \dots & y^{(k)''} \\ y^{(1)'''} & y^{(2)'''} & \dots & y^{(k)'''} \end{matrix} \right\| = 0 .
$$

Quindi *varrà la proprietà* (I), *se e solo se il sistema* (8.1) *è del tipo:*

$$
(11.2)\quad \begin{cases} y^{(1)'''} = y^{(1)''} A(x, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(k)}; y^{(1)'}, y^{(2)'}, \dots, y^{(k)'}) \\ y^{(2)'''} = y^{(2)''} A(x, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(k)}; y^{(1)'}, y^{(2)'}, \dots, y^{(k)'}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(k)'''} = y^{(k)''} A(x, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(k)}; y^{(1)'}, y^{(2)'}, \dots, y^{(k)'}) . \end{cases}
$$

(7) Vedi l. c. (4).

(8) Cfr. TERRACINI, *Sull'incidenza di spazi infinitamente vicini*, « Scritti Mat. offerti a Berzolari », 1936.

D'altra parte la proprietà prospettiva può ottenersi come riunione della proprietà (I) e della proprietà proiettiva.

Combinando le (11.2) con le (10.6), si ottiene che:

Condizione necessaria e sufficiente, perchè il sistema (8.1) *goda della proprietà prospettiva in prima approssimazione, è che esso sia del tipo:*

$$
(11.3) \qquad \begin{cases} y^{(1)'''} = y^{(1)''}\left(\sum_1^k{}_l A_l y^{(l)''} + B\right) \\ y^{(2)'''} = y^{(2)''}\left(\sum_1^k{}_l A_l y^{(l)''} + B\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(k)'''} = y^{(k)''}\left(\sum_1^k{}_l A_l y^{(l)''} + B\right) \end{cases}
$$

con A_l, B *funzioni di* $x, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(k)}, y^{(1)'}, y^{(2)'}, \dots, y^{(k)'}$; *tipo che chiameremo ancora* (G).

Detti sistemi (G) *sono invarianti per trasformazioni proiettive.*

Di tale tipo sono per esempio i sistemi sezionali (generalizzazioni dei sistemi sezionali di Kasner) che si ottengono proiettando da un punto P di un S_{k+2} su un S_{k+1} sghembo con P, le ∞^{3k} sezioni piane di una qualunque ipersuperficie dell'S_{k+1} (9).

---

(9) Vedi l. c. (4), § 6.

SULLA DETERMINAZIONE DELLA FORMA ESTERNA DEL CONDOTTO DI ROTAZIONE DI MINIMA RESISTENZA, PER DETERMINATE CONDIZIONI POSTE ALLA LINEA MERIDIANA, IN CORRENTE SUPERSONICA LINEARIZZATA (*)

Memoria del Socio nazionale residente CARLO FERRARI
presentata nell'adunanza del 20 Aprile 1955

Riassunto. — *L'A. studia il problema della determinazione della forma esterna del condotto di rotazione di minima resistenza colle condizioni:*

a) *sono fissate le sezioni di ingresso e di uscita del condotto;*

a') *è fissata l'*area *racchiusa tra la linea meridiana* esterna *e quella interna, che si suppone data; oppure*

b) *è fissato il* volume *racchiuso tra le superfici di rivoluzione aventi le sopraddette linee meridiane.*

Il problema è risolto sia applicando ed estendendo i risultati ottenuti da Lighthill (*Parte I*), *sia applicando i risultati ottenuti da* Ferrari (*Parte II*). *Col primo metodo, il problema è ridotto alla soluzione di un'equazione integrale di* Fredholm *di* 2^a *specie, che è risolta col metodo di* Goursat; *col secondo procedimento la soluzione è ottenuta risolvendo un'equazione integrale di prima specie, del tipo di quella che occorre nella teoria dei profili alari.*

Nella Parte III sono riportati i risultati dei calcoli corrispondenti a diversi esempi di applicazione della teoria prima esposta.

1. — *Introduzione.*

Si considera un condotto di rivoluzione, posto in una corrente supersonica linearizzata, e si ricerca la forma che deve presentare la linea meridiana della superficie che delimita esternamente il condotto stesso, perchè

(*) *Questo lavoro è stato fatto per suggerimento e sotto il patrocinio del « Cornell Aeronautical Laboratory, Inc. », Buffalo, New-York.*

la resistenza *esterna* da questo presentata risulti *minima* nelle due condizioni:

a) è fissata l'area racchiusa tra la linea meridiana *esterna* e quella *interna*, che si suppone data;

oppure:

b) è fissato il volume racchiuso tra la superficie di rivoluzione aventi le sopraddette linee meridiane.

La soluzione è ottenuta sia applicando ed estendendo i risultati ottenuti da Lighthill ([1]) (Parte I); sia applicando ed estendendo quelli ricavati da Ferrari ([2]) (Parte II); col primo metodo si ottiene direttamente la forma esterna del condotto, cui corrisponde la minima resistenza, risolvendo un'equazione integrale di 2ª specie non omogenea, mentre col secondo metodo è la legge secondo cui devono essere distribuite le singolarità (*sorgenti supersoniche*) lungo l'asse del condotto, che è ottenuta, e che risulta dipendente da un'equazione integrale di prima specie.

Nella Parte III sono riportati i calcoli fatti applicando il metodo esposto nella Parte I: da essi appare che, per quanto si riferisce alla determinazione della forma del condotto *ottimo*, nessuna apprezzabile differenza si ottiene se si determina tale forma assumendo per la dipendenza del coefficiente di pressione dagli elementi geometrici del contorno la formula valida nel caso di moto bidimensionale (*formula di Ackeret*) invece di quella qui ricavata, valida per il moto simmetrico rispetto ad un asse. Questo risultato semplifica in modo sostanziale la soluzione del problema considerato; d'altra parte non è da considerarsi *banale*, perchè appare dalla stessa applicazione numerica che la dipendenza del coefficiente di pressione dagli elementi geometrici qui ottenuta differisce apprezzabilmente da quella corrispondente alla formula di Ackeret.

In conseguenza del risultato sopraddetto, e della notevole semplificazione che esso apporta alla soluzione del problema, *non* è stata fatta una applicazione numerica del metodo esposto nella II parte: si è ritenuta tuttavia opportuna la sua pubblicazione per la sua applicabilità a problemi diversi da quello su cui qui si riferisce. Deve poi essere osservato che recentemente è apparsa una Nota di H. M. Parker ([3]) in cui il problema della determinazione del condotto e del solido di rivoluzione di resistenza minima è studiato collo stesso procedimento seguita da Ferrari in ([2]) e nella Parte II di questa Memoria, già apparsa come *Report* del *Cornell Aero-*

([1]) M. J. LIGHTHILL, *Supersonic flow past bodies of revolution*, R. M., n. 2003, « A. R. C. Technical Report ».

([2]) C. FERRARI, *Sul problema del proietto di minima resistenza*, « Atti della Accademia delle Scienze di Torino », 1939-1940.

([3]) HERMON M. PARKER, *Minimum-drag ducted and pointed bodies of revolution based on linearized supersonic theory*, « Technical Note NACA », n. 3189, Maggio 1954.

nautical Laboratory nel 1953 [4], e quindi anteriore alla ricerca del Parker, che in effetto la cita. Ora la Nota del Parker ha in più rispetto alle ricerche precedenti del presente Autore, il riconoscimento che il nocciolo dell'equazione integrale definente la distribuzione delle sorgenti iperboliche è un integrale *pseudo-ellittico*; d'altra parte il problema di Parker è più ristretto di quello qui considerato, perchè egli non ha saputo esprimere le condizioni aggiuntive, nel problema di minimo, per mezzo della funzione di distribuzione delle sorgenti, se non nel caso più semplice in cui l'unica condizione imposta alla linea meridiana del condotto è quella di passare per due punti assegnati.

2. — *Indicazione dei principali simboli usati.*

x = ascissa misurata lungo l'asse del condotto nel senso della velocità asintotica U_∞; R = distanza dall'asse; R_1 e R_2 rispettivamente raggio della sezione di imbocco del condotto e raggio della sezione di uscita; $R_0 = \dfrac{R_1 + R_2}{2}$; R_i = raggio interno di una sezione generica del condotto con un piano x = cost.; R_e = raggio esterno della detta sezione.

M_∞ = numero di Mach della corrente indisturbata $\vec{U}_\infty$; $B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$;

$$z = \frac{x}{BR_1} - 1 \; ; \qquad r_1 = \frac{R_e}{BR_1} \; ; \qquad r_2 = \frac{R_e}{BR_2} \; ;$$

L = lunghezza del condotto; $\quad l_1 = \dfrac{L}{BR_1}$; $\quad \eta = \dfrac{dr_1}{dz} = \dfrac{dR_e}{dx}$;

$f(x)$ = densità della distribuzione di sorgenti supersoniche lungo l'asse del condotto, corrispondente al campo perturbato esterno al condotto stesso;

p = pressione; p_∞ = pressione della corrente indisturbata; ϱ_∞ = densità della corrente indisturbata; ϱ = densità;

$$C_D = \text{coefficiente di resistenza} = \frac{\text{Resistenza della superficie esterna}}{\frac{1}{2}\,\varrho_\infty U_\infty^2 R_0^2 \pi} .$$

PARTE I.

3. — *Estensione del metodo di Lighthill alla determinazione del flusso attorno al quasi cono. Determinazione della distribuzione di sorgenti supersoniche generanti il campo attorno al condotto.*

La densità $V_\infty f(x)$ della distribuzione di sorgenti supersoniche eseguite sull'asse x corrispondenti al campo di moto attorno alla superficie

[4] C. FERRARI, *Determination of the external contour of a body of revolution with a central duct so as to give minimum drag in supersonic flow, with various perimetral conditions imposed upon the missile geometry*, Report n. AF 814-A-1, « Cornell Aeronautical Laboratory », marzo 1953.

esterna del condotto è determinata dalla

$$\frac{dR_e}{dx} \simeq \frac{1}{R_e}\int_0^{x-BR_e} \frac{(x-\xi)\dot{f}(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2R_e^2}} \tag{1}$$

se $\dot{f}(\xi) = \dfrac{df}{d\xi}$, ed in cui è lecito porre a secondo membro

$$R_e = R_1 + \beta(x - BR_1)$$

se β è il semiangolo al vertice del tronco di cono di lunghezza L, le cui basi coincidono colla sezione di ingresso e colla sezione di uscita del condotto (fig. 1).

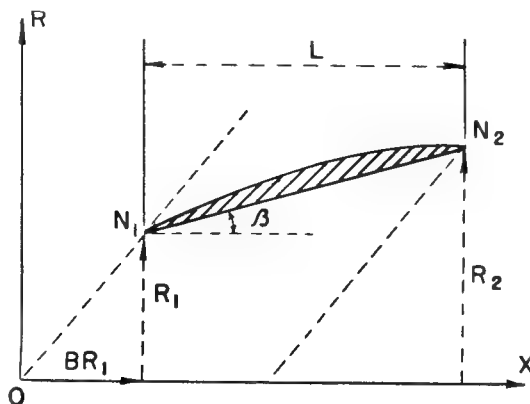



Fig. 1.

La (1) esprime la condizione che la velocità risultante della velocità della corrente indisturbata e di quella prodotta dalle sorgenti supersoniche è nei punti della superficie esterna del condotto stesso tangente a questo. Colle notazioni

$$\xi = BR_1 t\ ; \qquad \frac{1}{B}\frac{dr_1}{dz} = g(z)\ ; \qquad \dot{f}(\xi) = h(t) \tag{2}$$

si ha dalla (1)

$$g(z) = \frac{1}{1+\beta Bz}\int_0^{(1-\beta B)z} \frac{(1+z-t)h(t)dt}{\sqrt{(1+z-t)^2 - (1+\beta Bz)^2}} \tag{3}$$

ossia

$$g^*(z) = (1+\beta Bz)g(z) = \int_0^{(1-\beta B)z} \frac{(1+z-t)h(t)dt}{\sqrt{[(1-\beta B)z - t][(1+\beta B)z - t + 2]}}\ .$$

Moltiplicando primo e secondo membro per $\dfrac{dz}{\sqrt{s-z}}$ ed integrando tra i limiti 0 e s, scambiando a secondo membro l'ordine di integrazione

rispetto a t e a z, si ottiene

$$(4)\qquad v(s)=\int_0^s \frac{g^*(z)dz}{\sqrt{s-z}}=\int_0^{(1-\beta B)s} h(t)dt\int_{\frac{t}{1-\beta B}}^{s}\frac{(1+z-t)dz}{\sqrt{[(1-\beta B)z-t][(1+\beta B)z-t+2]}}\,.$$

Eseguita l'integrazione rispetto a z a secondo membro della (4), si ha:

$$(5)\qquad v(s)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^{(1-\beta B)s} h(t)\sqrt{\frac{1+\frac{\beta B}{1-\beta B}t}{1-\beta^2B^2}}\,K\left(\frac{s-\frac{t}{1-\beta B}}{1+\frac{\beta Bt}{1-\beta B}}\right)dt$$

essendo

$$(6)\qquad \frac{\pi}{2\sqrt{2}}K(x)=\sqrt{\frac{2}{1+\beta B}+x}\cdot \boldsymbol{E}\left(\sqrt{\frac{x}{x+\frac{2}{1+\beta B}}}\right)-$$

$$-\frac{1-\beta B}{1+\beta B}\,\frac{\boldsymbol{F}\left(\sqrt{\frac{x}{x+\frac{2}{1+\beta B}}}\right)}{\sqrt{x+\frac{2}{1+\beta B}}}$$

in cui $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{F}$ sono gli integrali ellittici completi di prima e di seconda specie. Dalla (6) si ottiene $K(0)=\sqrt{1+\beta B}$, e pertanto derivando rispetto ad s primo e secondo membro della (5), e ponendo

$$(7)\qquad t_1=\frac{t}{1-\beta B}\,;\quad h[s(1-\beta B)]=h^*(s)\,;\quad h[t_1(1-\beta B)]=h^*(t_1)\,;$$

$$(7')\qquad w(s)=\frac{1}{\sqrt{1-\beta B}}\,\frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{\dot v(s)}{\sqrt{1+\beta Bs}}$$

si ottiene

$$(8)\qquad w(s)=h^*(s)+\frac{1}{\sqrt{1+\beta B}}\int_0^s h^*(t_1)\frac{\dot K\left(\frac{s-t_1}{1+\beta Bt_1}\right)}{\sqrt{1+\beta Bs}\,\sqrt{1+\beta Bt_1}}\,dt_1$$

in cui

$$\dot K(x)=\frac{dK}{dx}=H(x)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{(1+x)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{F}}{x\sqrt{x+\frac{2}{1+\beta B}}}\,.$$

La (8) è un'equazione integrale di Volterra, di seconda specie, la cui soluzione è

$$(9)\qquad h^*(s)=w(s)-\frac{1}{\sqrt{1+\beta B}}\int_0^s \Gamma(s,t_1)w(t_1)dt_1$$

in cui il nucleo risolvente è dato dalla serie, sempre uniformemente convergente (3)

$$\Gamma(s,t_1) = H^*(s,t_1) - \frac{1}{\sqrt{1+\beta B}} H^{*(2)}(s,t_1) + \tag{10}$$

$$+ \frac{1}{1+\beta B} H^{*(3)}(s,t_1) - \frac{1}{(1+\beta B)^{3/2}} H^{*(4)}(s,t_1) + \dots$$

avendo posto

$$H^*(s,t_1) = \frac{\dot{K}\left(\frac{s-t_1}{1+\beta Bt_1}\right)}{\sqrt{1+\beta Bs}\sqrt{1+\beta Bt_1}} = \frac{H\left(\frac{s-t_1}{1+\beta Bt_1}\right)}{\sqrt{1+\beta Bs}\sqrt{1+\beta Bt_1}}$$

$$H^{*(2)}(s,t_1) = \int_{t_1}^{s} H^*(s,u)H^*(u,t_1)du\,; \qquad H^{*(3)}(s,t_1) = \int_{t_1}^{s} H^*(s,u)H^{*(2)}(u,t_1)du.$$

Ora è

$$H^{*(2)}(s,t_1) = \int_{t_1}^{s} \frac{H\left(\frac{s-u}{1+\beta Bu}\right)}{\sqrt{1+\beta Bs}\sqrt{1+\beta Bu}} \cdot \frac{H\left(\frac{u-t_1}{1+\beta Bt_1}\right)}{\sqrt{1+\beta Bu}\sqrt{1+\beta Bt_1}} du\,;$$

ponendo

$$u_1 = \frac{u-t_1}{1+\beta Bt_1}$$

si ricava

$$H^{*(2)}(s,t_1) = \frac{1}{\sqrt{1+\beta Bs}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\beta Bt_1}} \int_0^y H(u_1) \cdot \frac{H\left(\frac{y}{1+\beta Bu_1} - \frac{u_1}{1+\beta Bu_1}\right)}{1+\beta Bu_1} du_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\beta Bs}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\beta Bt_1}} H_2\left(\frac{s-t_1}{1+\beta Bt_1}\right)$$

posto, per un istante,

$$y = \frac{s-t_1}{1+\beta Bt_1}.$$

In modo analogo si ricava

$$H^{*(3)}(s,t_1) = \frac{1}{\sqrt{1+\beta Bs}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\beta Bt_1}} \int_0^y H_2(u_1) \frac{H\left(\frac{y}{1+\beta Bu_1} - \frac{u_1}{1+\beta Bu_1}\right)}{1+\beta Bu_1} du_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\beta Bs}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\beta Bt_1}} H_3\left(\frac{s-t_1}{1+\beta Bt_1}\right)$$

---

(3) E. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, vol. III, pag. 327 e segg.

e così via, di guisa che risulta

$$(10') \qquad \Gamma(s,t_1) = \frac{1}{\sqrt{1+\beta Bs}\,\sqrt{1+\beta Bt_1}}\left[H\left(\frac{s-t_1}{1+\beta Bt_1}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{1+\beta B}} H_2\left(\frac{s-t_1}{1+\beta Bt_1}\right) + \frac{1}{1+\beta B} H_3\left(\frac{s-t_1}{1+\beta Bt_1}\right) - \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\beta Bs}\,\sqrt{1+\beta Bt_1}} \cdot \Gamma^*\left(\frac{s-t_1}{1+\beta Bt_1}\right)$$

e la (9) dà

$$(9') \qquad h^*(s) = w(s) - \frac{1}{\sqrt{1+\beta B}} \int_0^s \frac{\Gamma^*\left(\dfrac{s-t_1}{1+\beta Bt_1}\right)}{\sqrt{1+\beta Bs}\,\sqrt{1+\beta Bt_1}}\, w(t_1)dt_1 \,.$$

4. — *Calcolo della pressione e della forza risultante sul quasi-cono.*

La componente della velocità secondo x del campo perturbato in un punto generico della superficie conica cui appartengono le bocche d'ingresso e di uscita è data dalla

$$(11) \quad -\frac{1}{U_\infty}\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \int_0^{x-BR_e} \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2R_e^2}} = \int_0^z \frac{h^*(t_1)dt_1}{\sqrt{(z-t_1)\left[\dfrac{1+\beta B}{1-\beta B} z - t_1 + \dfrac{2}{1-\beta B}\right]}}$$

ossia, in grazia della (9)

$$-\frac{1}{U_\infty}\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \int_0^z \frac{w(u)du}{\sqrt{(z-u)\left[\dfrac{1+\beta B}{1-\beta B} z - u + \dfrac{2}{1-\beta B}\right]}} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1+\beta B}}\int_0^z w(u)du \int_u^z \frac{\Gamma(t_1,u)dt_1}{\sqrt{(z-t_1)\left[\dfrac{1+\beta B}{1-\beta B} z - t_1 + \dfrac{2}{1-\beta B}\right]}} = \int_0^z w(u)T(z,u)du$$

avendo posto

$$(11') \qquad T(z,u) = \frac{1}{\sqrt{(z-u)\left[\dfrac{1+\beta B}{1-\beta B} z - u + \dfrac{2}{1-\beta B}\right]}} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1+\beta B}} \int_u^z \frac{\Gamma(t_1,u)dt_1}{\sqrt{(z-t_1)\left[\dfrac{1+\beta B}{1-\beta B} z - t_1 + \dfrac{2}{1-\beta B}\right]}} \,.$$

Ma è

$$w(u) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\beta B}} \cdot \frac{\dot{v}(u)}{\sqrt{1+\beta B u}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+\beta B u}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta B}} \left[\frac{g^*(0)}{\sqrt{u}} + \int_0^u \frac{\dot{g}^*(z)dz}{\sqrt{u-z}} \right]$$

n cui, al solito, col punto si è rappresentata la derivata della funzione isotto indicata.

È pertanto

$$(12) \qquad -\frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\beta B}} \left[g^*(0) \int_0^z \frac{T(z,u)du}{\sqrt{u}\sqrt{1+\beta B u}} + \right.$$

$$\left. + \int_0^z \frac{T(z,u)du}{\sqrt{1+\beta B u}} \int_0^u \frac{\dot{g}^*(s)ds}{\sqrt{u-s}} \right].$$

È poi

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta B}} \int_0^z \frac{T(z,u)du}{\sqrt{1+\beta B u}} \int_0^u \frac{\dot{g}^*(s)ds}{\sqrt{u-s}} = \int_0^z \dot{g}^*(s) W(z,s)ds$$

posto

$$(13) \qquad W(z,s) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^z \frac{T(z,u)du}{\sqrt{u-s}\sqrt{1+\beta B u}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta B}}.$$

E poichè di conseguenza

$$W(z,0) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\beta B}} \int_0^z \frac{T(z,u)du}{\sqrt{u}\sqrt{1+\beta B u}}$$

appare che si può scrivere

$$(14) \quad -\frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = g^*(0) W(z,0) + \int_0^z \dot{g}^*(s) W(z,s)ds = \int_{-\infty}^z W(z,s) d[g^*(s)].$$

Sostituendo a $T(z,u)$ la sua espressione (11′) si ha dalla (13)

$$W(z,s) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\beta B}} \cdot$$

$$\cdot \left[\int_s^z \frac{du}{\sqrt{u-s}\sqrt{1+\beta B u} \sqrt{(z-s)\left(\frac{1+\beta B}{1-\beta B}\right) z - u + \frac{2}{1-\beta B}}} \right. -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{1+\beta B}} \int_{\frac{z-s}{1+\beta B s}}^0 \frac{\Gamma^*(y)dy}{\sqrt{1+\beta B y}} \cdot$$

$$\cdot \int_s^{\frac{z-y}{1+\beta B y}} \frac{du}{\sqrt{u-s}\sqrt{1+\beta B u} \sqrt{\{z-u-y(1+\beta B u)\}\left\{\frac{1+\beta B}{1-\beta B} z - u - y(1+\beta B u) + \frac{2}{1-\beta B}\right\}}}$$

se, per un istante, si pone

$$u = \frac{t_1 - y}{1 + \beta B u}\,.$$

Siano (15)

$$k^2 = \frac{\left(\dfrac{1}{\beta B} + \dfrac{1+\beta B}{1-\beta B} z + \dfrac{2}{1-\beta B}\right)(z-s)}{\left(z + \dfrac{1}{\beta B}\right)\left(\dfrac{1+\beta B}{1-\beta B} z + \dfrac{2}{1-\beta B} - s\right)}$$

$$m = \frac{2}{\sqrt{\beta B}} \, \frac{1}{\sqrt{\left(z + \dfrac{1}{\beta B}\right)\left(\dfrac{1+\beta B}{1-\beta B} z + \dfrac{2}{1-\beta B} - s\right)}}$$

$$k_1^2 = \frac{\left(\dfrac{z}{1-\beta B} - \dfrac{y}{1+\beta B} + \dfrac{2}{1-\beta^2 B^2} + \dfrac{1}{\beta B}\right)\left(\dfrac{z-y}{1+\beta B} - s\right)}{\left(\dfrac{z-y}{1+\beta B} + \dfrac{1}{\beta B}\right)\left(\dfrac{z}{1-\beta B} - \dfrac{y}{1+\beta B} + \dfrac{2}{1-\beta^2 B^2} - s\right)}$$

$$m_1 = \frac{2}{\sqrt{\beta B}} \, \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{z}{1-\beta B} - \dfrac{y}{1+\beta B} + \dfrac{2}{1-\beta^2 B^2} - s\right)\left(\dfrac{z-y}{1+\beta B} + \dfrac{1}{\beta B}\right)}}\,.$$

Si ricava

$$W(z,s) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \, \frac{1}{\sqrt{1-\beta B}} \left[m \boldsymbol{F}(k) + \right. \tag{16}$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{1+\beta B}} \int_0^{\frac{z-s}{1+\beta B s}} \frac{\Gamma^*(y)}{\sqrt{1+\beta B y}} \, m_1 \boldsymbol{F}(k_1) \, dy \right].$$

Osservando che è

$$W(z,z) = \frac{1}{1+\beta B z} \tag{17}$$

si ha dalla (14)

$$-\frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \Phi}{dx} = g^*(z) \frac{1}{1-\beta B z} - \int_0^z S(z,s) \cdot g^*(s) ds = g(z) - \int_0^z S(z,s) g^*(s) ds \tag{18}$$

essendo

$$S(z,s) = \frac{\partial W(z,s)}{\partial s}\,. \tag{19}$$

Corrispondentemente risulta

$$\frac{p - p_\infty}{\varrho_\infty U_\infty^2} = g(z) - \int_0^z S(z,s) g^*(s) ds = \frac{1}{B}\left[\eta(z) - \int_0^z S_1(z,s) \eta(s) ds\right] \tag{20}$$

essendo

$$S_1(z,s) = (1 + \beta B s) S(z,s)\,.$$

Per il coefficiente di resistenza si ottiene così l'espressione

$$(21)\quad C_D = 4\frac{R_1^2}{R_0^2}\left[\int_0^{l_1}(1+\beta Bz)\eta^2(z)dz - \int_0^{l_1}(1+\beta Bz)\eta(z)dz\int_0^z S(z,s)(1+\beta Bs)\eta(s)ds\right] =$$

$$= \frac{R_1^2}{R_0^2}\left[4\int_0^{l_1}(1+\beta Bz)\eta^2(z)dz - 2\int_0^{l_1}(1+\beta Bz)\eta(z)dz\int_0^{l_1} S^*\eta(s)(1+\beta Bs)ds\right]$$

in cui è

$$(22)\quad \begin{aligned} S^* &= S(z, s) \quad \text{per} \quad 0 \leq s \leq z \\ S^* &= S(s, z) \quad \text{per} \quad z \leq s \leq l_1 . \end{aligned}$$

5. — *Equazione determinatrice della forma esterna del quasi-cono di minima resistenza, per date condizioni poste alla linea meridiana.*

La condizione che l'*area* racchiusa tra la linea meridiana *esterna* e quella *interna* del condotto, in un piano meridiano generico, abbia un valore fissato, si traduce nella

$$\int_{BR_1}^{BR_1+L}(R_e - R_i)dx = \text{costante},$$

ossia se $R_i = R_i(x)$ è *dato*,

$$(23)\quad \int_0^{l_1} dz \int_0^z \eta(s)ds = C$$

mentre la condizione che il *volume* racchiuso tra la superficie *esterna* del condotto e quella *interna* sia data, si esprime colla

$$\int_{BR_1}^{BR_1+L}(R_e^2 - R_i^2)dx = 2\int_{BR_1}^{BR_1+L}\frac{R_e + R_i}{2}(R_e - R_i)dx = \text{costante}$$

ossia

$$(24)\quad \int_0^{l_1}(1 + \beta Bz)dz\int_0^z \eta(s)ds = D = \text{costante}$$

quando si ponga per approssimazione

$$\frac{R_e + R_i}{2} = R_1 + \beta(x - BR_1) = R_1(1 + \beta Bz) .$$

Deve poi, in ogni caso, essere

$$\int_{BR_1}^{BR_1+L}\frac{dR_e}{dx}dx = R_2 - R_1 = R_1\beta Bl_1 ,$$

ossia

$$(25)\quad \int_0^{l_1}\eta(z)dz = E = \text{costante}.$$

La variazione prima ΔC_D di C_D, quando alla η si dia una variazione arbitraria $\Delta\eta$ è data, per la (21), dalla

$$\Delta C_D = \frac{R_1^2}{R_0^2}\Big\{8\int_0^{l_1}(1+\beta Bz)\eta(z)\Delta\eta(z)dz -$$

$$-2\Big[\int_0^{l_1}(1+\beta Bz)\eta(z)dz\int_0^{l_1}S^*\Delta\eta(s)(1+\beta Bs)ds +$$

$$+\int_0^{l_1}(1+\beta Bz)\Delta\eta(z)dz\int_0^{l_1}S^*\eta(s)(1+\beta Bs)ds\Big]\Big\}.$$

Ma è

$$\int_0^{l_1}(1+\beta Bz)\eta(z)dz\int_0^{l_1}(1+\beta Bs)\cdot S^*\Delta\eta(s)ds =$$

$$=\int_0^{l_1}(1+\beta Bs)\cdot\Delta\eta(s)ds\int_0^{l_1}(1+\beta Bz)S^*\eta(z)dz$$

in cui nel calcolare

$$\int_0^{l_1}(1+\beta Bz)S^*\eta(z)dz$$

si deve porre

$$\text{per}\quad 0\leq z\leq s \qquad S^* = S(s, z)$$
$$s\leq z\leq l_1 \qquad S^* = S(z, s)\,.$$

Cambiando le notazioni s, z si ha

$$\int_0^{l_1}(1+\beta Bz)\Delta\eta(s)ds\int_0^{l_1}(1+\beta Bz)\cdot S^*\eta(z)dz =$$

$$=\int_0^{l_1}(1+\beta Bz)\Delta\eta(z)dz\int_0^{l_1}(1+\beta Bs)S^*\eta(s)ds$$

in cui sarà

$$\text{per}\quad 0\leq s\leq z \qquad S^* = S(z, s)$$
$$z\leq s\leq l \qquad S^* = S(s, z)$$

e pertanto risulta

(26)
$$\Delta C_D = \frac{R_1^2}{R_0^2}\Big\{8\int_0^{l_1}(1+\beta Bz)\eta(z)\Delta\eta(z)dz -$$

$$-4\int_0^{l_1}(1+\beta Bz)\Delta\eta(z)\int_0^{l_1}(1+\beta Bs)\cdot S^*\eta(s)ds\Big\} =$$

$$=\frac{R_1^2}{R_0^2}\int_0^{l_1}(1+\beta Bz)[8\eta(z)-4F(z)]\cdot\Delta\eta(z)dz$$

se si pone

(27)
$$F(z) = \int_0^{l_1}(1+\beta Bs)S^*\eta(s)ds\,.$$

D'altra parte dalle (23) e (25) si deducono le

$$\int_0^{l_1} dz \int_0^z \Delta\eta(s)ds = 0\,; \qquad \int_0^{l_1} \Delta\eta(z)dz = 0$$

od anche

$$(28) \qquad \int_0^{l_1} z\Delta\eta(z)dz = 0\,; \qquad \int_0^{l_1} \Delta\eta(z)dz = 0$$

mentre la (24) dà

$$\int_0^{l_1} (1 + \beta Bz)dz \int_0^z \Delta\eta(s)ds = 0$$

ossia, variando l'ordine di integrazione

$$(28') \qquad \int_0^{l_1} \left(z + \frac{\beta B}{2} z^2\right) \cdot \Delta\eta(z)dz = 0\,.$$

Annullando la variazione prima ΔC_D di C_D per una qualsiasi $\Delta\eta(z)$ soddisfacente alle (28) si ha

$$(29) \qquad 8(1 + \beta Bz)\eta(z) - 4(1 + \beta Bz)F(z) + \lambda_1 + \lambda_2 z = 0$$

(essendo λ_1 e λ_2 costanti opportune), mentre se le condizioni da soddisfare sono la seconda delle (28) e la (28′) si ottiene

$$(29') \quad 8(1 + \beta Bz)\eta(z) - 4(1 + \beta Bz)F(z) + \lambda_1 + \lambda_2' z\left(1 + \frac{\beta B}{2} z\right) = 0\,.$$

È ancora opportuno osservare che la (29) (o la 29′) definisce proprio la linea meridiana di *minima resistenza*: in effetto la variazione seconda di C_D conseguente a una qualsiasi $\Delta\eta$, risulta dalla (21)

$$(30) \qquad \Delta_2 C_D = \frac{R_1^2}{R_0^2} \left\{ 4 \int_0^{l_1} (1 + \beta Bz)[\Delta\eta(z)]^2 dz - \right.$$

$$\left. - 2 \int_0^{l_1} (1 + \beta Bz)\Delta\eta(z) \int_0^{l_1} S^* \Delta\eta(s)(1 + \beta Bs)ds \right\} > 0$$

in quanto, se le (28) sono sempre soddisfatte, $\Delta_2 C_D$ coincide col coefficiente di resistenza di un condotto avente gli stessi R_1 e R_2, e le stesse sezioni di imbocco e di uscita, la cui linea meridiana è caratterizzata dalla $\Delta\eta(z)$, e detto coefficiente di resistenza è sempre positivo.

Risoluzione dell'equazione integrale (29).
6. — *Metodo del Goursat.*

Sostituendo a $F(z)$ la sua espressione (27) si ha dalla (29)

$$(31) \qquad \eta(z) = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} (1 + \beta Bs) S^* \eta(s) + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 z}{1 + \beta Bz}$$

in cui le costanti a secondo membro si continuano ad indicare con λ_1 e con λ_2, e che è un'*equazione integrale di Fredholm*: essa insieme alle (23) e (25) definisce la funzione cercata $\eta(z)$ e le costanti λ_1 e λ_2. La soluzione della (31) si può rappresentare colla

$$\eta(z) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 z}{1 + \beta B z} + \frac{1}{2}\int_0^{l_1} \Gamma(z,s)\, \frac{\lambda_1 + \lambda_2 s}{1 + \beta B s}\, ds \tag{32}$$

in cui il nocciolo risolvente è dato dalla *serie di Fredholm*. È però più generalmente conveniente ricercare una soluzione *diretta* della (31) col metodo del Goursat [4]: sia $(1 + \beta B z)\eta(z) = \varphi(z)$, e quindi $(1 + \beta B s)\eta(s) = \varphi(s)$ e si scriva perciò la (31) nella forma

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}(1 + \beta B z)\int_0^{l_1} S^* \varphi(s) ds + \lambda_1 + \lambda_2 z\,. \tag{31'}$$

Si pone $\theta = \pi \dfrac{z}{l_1}$; $\theta_1 = \pi \dfrac{s}{l_1}$, e si approssima S^* col polinomio trigonometrico S^{**} dato che

$$S^{**} = \sum_{n=0}^{m} A_n \cos \pi\theta \cos \pi\theta_1 + \sum_{k=1}^{m} A_{m+k} \,\text{sen}\, k\theta \cdot \text{sen}\, k\theta_1\,. \tag{33}$$

Le costanti A_n e A_{m+k} si determinano in modo che risulti nell'intervallo $0 \div \pi$ minimo lo *scarto quadratico globale*

$$E^* = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} [k_1(\theta, \theta_1)]^2 d\theta d\theta_1 \tag{34}$$

essendo $k_1(\theta, \theta_1) = S^* - S^{**}$.

Sostituendo a k_1 l'espressione ottenibile dalla (33), E^* risulta funzione delle sole A; le condizioni di *estremo* sono date dalle

$$\frac{\partial E^*}{\partial A} = 0 \tag{34'}$$

Siano:

$$\varepsilon_n = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} S^* \cos n\theta \cos n\theta_1 d\theta d\theta_1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, m) \tag{35}$$

$$\varepsilon_{m+k} = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} S^* \sin k\theta \sin k\theta_1 d\theta d\theta_1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

---

[4] E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, vol. III, pag. 480 (Vedi anche G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*, vol. I, pag. 371 e segg.).

$$\mu_{n,i} = \int_0^\pi \int_0^\pi \cos n\theta \cos n\theta_1 \cos i\theta \cos i\theta_1 d\theta d\theta_1 = \frac{\pi^2}{4} \text{ per } n = i \quad \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} i \leq m,\ i \neq 0$$

$$= 0 \text{ per } n \neq i$$

$$= \pi^2 \text{ per } n = i = 0$$

$$\mu_{n,m+k} = \int_0^\pi \int_0^\pi \cos n\theta \cos n\theta_1 \operatorname{sen} k\theta \operatorname{sen} k\theta_1 d\theta d\theta_1 = \frac{4k^2}{k^2 - n^2} \text{ se } (k + n) \text{ (e quindi } k - n) \text{ è } \textit{dispari}$$

$$= 0 \text{ se } (k + n) \text{ (e quindi } k - n) \text{ è } \textit{pari}$$

$$\mu_{m+k,n} = \mu_{n,m+k}$$

$$\mu_{m+k,m+j} = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{se} \quad k = j$$

$$= 0 \quad \text{se} \quad k \neq j\,.$$

Esplicitando le condizioni di estremo (34′) si ha, supposto ad es. m *pari*

$$(36) \quad \left\{\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= \mu_{0,0} A_0 + \mu_{0,m+1} A_{m+1} + \mu_{0,m+3} A_{m+3} + \dots + \mu_{0,2m-1} A_{2m-1} \\
\varepsilon_1 &= \mu_{1,1} A_1 + \mu_{1,m+2} A_{m+2} + \mu_{1,m+4} A_{m+4} + \dots + \mu_{1,2m} A_{2m} \\
\varepsilon_2 &= \mu_{2,2} A_2 + \mu_{2,m+1} A_{m+1} + \mu_{2,m+3} A_{m+3} + \dots + \mu_{2,2m-1} A_{2m-1} \\
&\dots\dots\dots \\
\varepsilon_{m+1} &= \mu_{m+1,0} A_0 + \mu_{m+1,2} A_2 + \dots + \mu_{m+1,m} A_m + \mu_{m+1,m+1} A_{m+1} \\
\varepsilon_{m+2} &= \mu_{m+2,1} A_1 + \mu_{m+2,3} A_3 + \dots + \mu_{m+2,m-1} A_{m-1} + \mu_{m+2,m+2} A_{m+2} \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}\right.$$

Il sistema (36) si può separare in due sistemi indipendenti; l'uno di $m + 1$ equazioni del tipo

$$(36') \quad \begin{aligned}
\varepsilon_n &= \mu_{n,n} A_n + \sum_{1}^{m-1}{}_k \mu_{n,m+k} A_{m+k} & (n = 0, 2, \dots m) \\
\varepsilon_{m+k} &= \mu_{m+k,m+k} A_{m+k} + \sum_{0}^{m}{}_n \mu_{m+k,n} A_n & (k = 1, 3, \dots m - 1);
\end{aligned}$$

l'altro di m equazioni del tipo

$$(36'') \quad \begin{aligned}
\varepsilon_i &= \mu_{i,i} A_i + \sum_{2}^{m}{}_j \mu_{i,m+j} A_{m+j} \\
\varepsilon_{m+j} &= \mu_{m+j,m+j} A_{m+j} + \sum_{1}^{m-1}{}_i \mu_{n+j,i} A_i
\end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 3, \dots m - 1 \\ j = 2, 4, \dots m \end{pmatrix}$$

che si possono ancora ridurre a due sistemi indipendenti, l'uno di $\frac{m}{2} + 1$ equazioni

$$(37) \quad \varepsilon_n = \mu_{n,n} A_n + \sum_{1}^{m-1}{}_k \mu_{n,m+k} \left[\frac{\varepsilon_{m+k}}{\mu_{m+k,m+k}} - \sum_{0}^{m}{}_\nu \frac{\mu_{m+k,\nu}}{\mu_{m+k,m+k}} A_\nu \right]$$

$$\begin{pmatrix} n = 0, 2, \dots m \\ \nu = 0, 2, \dots m \\ k = 1, 3, \dots m - 1 \end{pmatrix}$$

l'altro di $\frac{m}{2}$ equazioni

$$(37') \qquad \varepsilon_i = \mu_{i,i} A_i + \sum_{2}^{m} {}_j \, \mu_{i,m+j} \left[\frac{\varepsilon_{m+j}}{\mu_{m+j,m+j}} - \sum_{1}^{m-1} {}_p \, \frac{\mu_{m+j,p}}{\mu_{m+j,m+j}} A_p \right]$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, 3, \dots m-1 \\ j = 2, 4, \dots m \\ p = 1, 3, \dots m-1 \end{pmatrix}.$$

7. — *Determinazione delle* ε.

È opportuno notare subito che dalle (35) è facile dedurre un significato fisico delle ε, che ne consente di effettuare il calcolo anche senza conoscere esplicitamente la S^*. Si consideri difatti la distribuzione sull'asse x di sorgenti supersoniche, che produce nei punti della generatrice del cono, cui appartengono le bocche di ingresso e di uscita del condotto, e nell'intervallo $BR_1 \leq x \leq L + BR_1$ la velocità di componente radiale data dalla

$$(38) \qquad U_\infty \eta_n(z) = U_\infty \frac{\cos n\theta}{1 + \beta B \frac{l_1}{\pi} \theta}$$

e sia Φ_n il potenziale corrispondente. La legge che definisce la variazione dell'intensità di detta distribuzione lungo x si può ottenere colla (9'): precisamente, dalla (4) si ha

$$\dot{v}(s) = \frac{g^*(0)}{\sqrt{s}} + \int_0^s \frac{\dot{g}^*(z) dz}{\sqrt{s-z}}$$

ed essendo

$$g^*(z) = \frac{1}{B}(1 + \beta B z)\eta_n(z) = \frac{1}{B} \cos n\theta$$

si deduce

$$B\dot{v}(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} - \sqrt{\frac{\pi}{l_1}}\, n \int_0^{\theta'} \frac{\operatorname{sen} n\theta d\theta}{\sqrt{\theta' - \theta}} = \frac{1}{\sqrt{s}} - \sqrt{\frac{\pi}{l_1}}\, n \sqrt{\frac{2\pi}{n}} [\operatorname{sen} n\theta' C(n\theta') -$$

$$- \cos n\theta' S(n\theta')] = \frac{1}{\sqrt{s}} - \pi \sqrt{\frac{2n}{l_1}} [\operatorname{sen} n\theta' C(n\theta') - \cos n\theta' S(n\theta')]$$

essendo $C(n\theta')$ e $S(n\theta')$ rispettivamente il primo ed il secondo integrale di Fresnel dell'argomento indicato tra parentesi. Dalla $B\dot{v}(s)$ risulta senza altro la $Bw(s)$ dalla (7'), e quindi la $h^*(s)$ cercata colla (2').

Il *coefficiente di resistenza* corrispondente alla distribuzione di sorgenti ora indicata, definito convenzionalmente colla

$$(38) \qquad (C_D)_n = - \frac{R_1^2}{R_0^2} 4B \int_0^{l_1} \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} (1 + \beta B z) \eta_n(z) dz$$

può perciò essere senz'altro calcolato. D'altra parte, per confronto della (35) colla (21) appare che è

$$(38') \qquad (C_D)_n = \frac{R_1^2}{R_0^2}\left[\frac{4l_1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos^2 n\theta}{1+\beta B\frac{l_1}{\pi}\theta} - 2\frac{l_1^2}{\pi^2}\varepsilon_n\right]$$

e poichè risulta

$$\int_0^\pi \frac{\cos^2 n\theta}{1+\beta B\frac{l_1}{\pi}\theta}d\theta = \frac{1}{2a}\left\{\cos\left(\frac{2n}{a}\right)\left[Ci\left(\frac{2n}{a}+2\pi n\right)-Ci\left(\frac{2n}{a}\right)\right]+\log(1+a\pi)\right\}+$$
$$+\frac{1}{2a}\operatorname{sen}\left(\frac{2n}{a}\right)\left[Si\left(\frac{2n}{a}+2n\pi\right)-Si\left(\frac{2n}{a}\right)\right]$$

essendo $a = \beta B\frac{l_1}{\pi}$, mentre Ci e Si sono rispettivamente l'*integralcoseno* e l'*integralseno*, la (38') permette di calcolare ε_n.

In modo analogo, se $(C_D)_{m+k}$ dà il coefficiente di resistenza convenzionalmente definito come sopra si è detto, corrispondente alla distribuzione di sorgenti supersoniche per le quali è

$$(38'') \qquad U_\infty\eta_{m+k} = U_\infty\frac{\operatorname{sen} k\theta}{1+\beta B\theta\frac{l_1}{\pi}}$$

si ha

$$(38''') \qquad (C_D)_{m+k} = \frac{R_1^2}{R_0^2}\left[\frac{4l_1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 k\theta}{1+\beta B\frac{l_1}{\pi}\theta}d\theta - 2\frac{l_1^2}{\pi^2}\varepsilon_{m+k}\right]$$

essendo ora

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 k\theta}{1+\beta B\frac{l_1}{\pi}\theta}d\theta = \frac{1}{2a}\cos\frac{2k}{a}\left[-Ci\left(\frac{2k}{a}-2k\pi\right)+Ci\left(\frac{2k}{a}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{2a}\log(1+a\pi)-\frac{1}{2a}\operatorname{sen}\frac{2k}{a}\left[Si\left(\frac{2k}{a}+2k\pi\right)-Si\left(\frac{2k}{a}\right)\right].$$

Per il calcolo di $(C_D)_{m+k}$ vale un metodo del tutto analogo a quello prima detto per $(C_D)_n$: c'è solo ora da osservare che, corrispondentemente alle η_{m+k}, si ha ora

$$Bv(s) = \sqrt{\frac{\pi}{l_1}}\cdot k\sqrt{\frac{2\pi}{k}}\,[\cos(k\theta')\cdot C(k\theta') + \operatorname{sen}(k\theta')S(k\theta')]\,.$$

La (38''') permette perciò il calcolo delle ε_{m+k}.

Può essere interessante osservare che il primo termine a secondo membro della (38') o della (38''') dà il valore $(\overline{C}_D)$ che avrebbe C_D se per il calcolo della resistenza stessa si assumesse la formula che dà la pressione valida per il moto bidimensionale, di guisa che ε risulta proporzionale alla differenza tra il valore di $(\overline{C}_D)$ ora definito e quello ottenuto in base al valore della pressione calcolata colla formula corretta (20).

È da osservare infine che, per $\beta = 0$, e per n e k tendente all'infinito i valori delle pressioni dedotti colla formula bidimensionale e colla (20) sono uguali: è da presumere pertanto che tale risultato valga almeno per i valori di β abbastanza piccoli quali occorre considerare nelle applicazioni.

Si consideri infatti il *campo esterno* ad un cilindro circolare indefinito, il cui asse coincide con x e di raggio BR_0: si può ricavare che la funzione potenziale della distribuzione di sorgenti supersoniche che crea nei punti delle generatrici di detto cilindro una velocità radiale uguale a $U_\infty \cos nz$ è data dalla

$$\Phi_n = U_\infty \varphi_n = U_\infty [A(Y_0 \cos nz - J_0 \operatorname{sen} nz) + C(J_0 \cos nz + Y_0 \operatorname{sen} nz)]$$

in cui le costanti A e C sono da determinarsi in base alle condizioni

$$\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial r}\right)_{r=1} = \cos nz \qquad \text{posto} \qquad r = \frac{R}{BR_0} .$$

mentre le J_0 e Y_0 sono le funzioni cilindriche di Bessel di prima e di seconda specie, di ordine zero. Si ricava

$$C = \frac{J'_0(B_n)}{Y'_0(B_n)} A ; \qquad A = \frac{1}{nB} \frac{Y'_0(nB)}{Y'^2_0(nB) + J'^2_0(nB)} .$$

Conseguentemente si ha

$$\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial z}\right)_{r=1} = -\frac{1}{B} \frac{Y_0 Y'_0 + J_0 J'_0}{Y'^2_0 + J'^2_0} \operatorname{sen}(nz) + \frac{1}{B} \frac{Y_0 J'_0 - J_0 Y'_0}{Y'^2_0 + J'^2_0} \cos(nz) .$$

Ma ora è

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_0 Y'_0 + J_0 J'_0}{Y'^2_0 + J'^2_0} = -\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\cos\varphi_0 \cos\varphi_1 + \operatorname{sen}\varphi_0 \operatorname{sen}\varphi_1}{\frac{1}{2}\pi nB}}{\dfrac{1}{\frac{1}{2}\pi nB}} = -\cos(\varphi_1 - \varphi_0) = 0$$

essendo, per $n \to \infty$,

$$J_0(nB) \simeq \frac{\cos\varphi_0}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi nB}} ; \qquad Y_0(nB) \simeq \frac{\operatorname{sen}\varphi_0}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi nB}}$$

$$J_1(nB) \simeq \frac{\cos\varphi_1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi nB}} ; \qquad Y_1(nB) \simeq \frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi nB}}$$

in cui

$$\varphi_0 = nB - \frac{\pi}{4}; \qquad \varphi_1 = nB - \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}.$$

Si ha quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Y_0 J_0' - J_0 Y_0'}{Y_0'^2 + J_0'^2} = \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_0) = 1$$

e pertanto per n grandissimo

$$\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial z}\right)_{r=1} \cong \frac{1}{B} \cos nz$$

coincidente col valore corrispondente al moto bidimensionale.

Questo risultato, insieme coll'osservazione fatta precedentemente, conduce pertanto a ritenere che col crescere di n, le successive ε_n debbono *diminuire* per annullarsi per n tendente a infinito.

8. — *Calcolo della* $\varphi(z)$.

Risolti i sistemi (37) e (37') e calcolate le A_n e A_{m+k}, ponendo per S^* il valore approssimato S^{**}, dalla (31') si ha

$$\varphi(\theta) = \lambda_1 + \lambda_2 \frac{l_1}{\pi}\theta + \frac{l_1}{2\pi}\left(1 + \beta B \frac{l_1}{\pi}\theta\right)\int_0^\pi S^{**}\varphi(\theta_1)d\theta_1 = \tag{39}$$

$$= \lambda_1 + 2\lambda_2 l_1^*\theta + l_1^*(1 + 2\beta B l_1^*\theta)\left[\sum_0^m{}_n A_n H_n \cos n\theta + \sum_1^m{}_k A_{m+k} K_k \operatorname{sen} k\theta\right]$$

essendo

$$l_1^* = \frac{l_1}{2\pi}; \qquad H_n = \int_0^\pi \varphi(\theta_1)\cos n\theta_1 d\theta_1; \qquad K_k = \int_0^\pi \varphi(\theta_1)\operatorname{sen} k\theta_1 d\theta_1. \tag{40}$$

Se

$$B_n = \int_0^\pi (\lambda + 2\lambda_2 l_1^*\theta)\cos n\theta d\theta = -2l_1^*\lambda_2 \frac{2}{n^2} \quad \text{per } n \text{ dispari} \tag{41}$$

$$= \lambda_1\pi + \lambda_2 l_1^*\pi^2 \quad \text{per } n = 0$$

$$= 0 \quad \text{per } n \text{ pari}$$

$$C_n = \int_0^\pi (\lambda_1 + 2l_1^*\lambda_2\theta)\operatorname{sen} n\theta d\theta = \frac{2}{n}\lambda_1 + 2l_1^*\lambda_2\frac{\pi}{n} \quad \text{per } n \text{ dispari}$$

$$= 2l_1^*\lambda_2\frac{\pi}{n} \quad \text{per } n \text{ pari}$$

dalla (39) si ottiene:

$$\begin{cases} c_r H_r = B_r l_1^* \sum_i b_{ri} A_{m+i} K_i + 2\beta B l_1^{*2} L_r & r = 0, 2, 4, \dots \\ c_i' K_i = C_i l_1^* \sum_r b_{ri} A_{m+r} H_r + 2\beta B l_1^{*2} L_i' & i = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_i H_i = B_i + l_1^* \sum_r b_{ir} A_{m+r} K_r + 2\beta B l_1^{*2} L_i \\ c_r' K_r = C_r + l_1^* \sum_i b_{ir} A_{m+i} H_i + 2\beta B l_1^{*2} L_r' \end{cases} \tag{42}$$

essendo

$$(43)\quad \begin{cases} c_0 = 1 - l_1^* \pi A_0 - \beta B l_1^{*2} \pi^2 A_0 \,; \quad c_r = 1 - l_1^* \dfrac{\pi}{2} A_r - \beta B l_1^{*2} \dfrac{\pi^2}{2} A_r \\ c_i = 1 - l_1^* \dfrac{\pi}{2} A_i - \beta B l_1^{*2} \dfrac{\pi^2}{2} A_i \,; \quad c'_r = 1 - l_1^* \dfrac{\pi}{2} A_{m+r} - \beta B l_1^{*2} \dfrac{\pi}{2} A_{m+r} \\ c'_i = 1 - l_1^* \dfrac{\pi}{2} A_{m+i} - \beta B l_1^{*2} \dfrac{\pi^2}{2} A_{m+i} \end{cases}$$

$$(44)\qquad b_{ri} = \frac{1}{i+r} - \frac{1}{r-i} \,; \qquad b_{ir} = \frac{1}{i+r} - \frac{1}{i-r}$$

$$L_r = \sum{}' A_i H_1 \left[\frac{1}{(i+r)^2} + \frac{1}{(i-r)^2} \right] + \sum{}'_j A_{m+j} K_j \left[-(-1)^{r+j} \frac{\pi}{2} b_{rj} \right] - A_{m+r} K_r \frac{\pi}{2r}$$

$$L'_i = \sum{}'_j A_j H_j \frac{\pi}{2} b_{ji} [-(-1)^{i+j}] - \sum{}'_r A_{m+r} K_r \left[\frac{1}{(i-r)^2} + \frac{1}{(i+r)^2} \right] - A_i H_i \frac{\pi}{2i}$$

$$L_i = -\sum{}'_r A_r H_r \left[\frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1-r)^2} \right] - \sum{}'_j A_{m+j} K_j (-1)^{i+j} \frac{\pi}{2} b_{ij} - A_{m+i} K_i \frac{\pi}{2i}$$

$$L'_r = -\sum{}'_j A_j H_j (-1)^{j+r} b_{jr} - A_r H_r \frac{\pi}{2r} - \sum{}'_i A_{m+i} K_i \left[\frac{1}{(i+r)^2} + \frac{1}{(i-r)^2} \right]$$

$$(j = 0, 1, 2, \dots, m)$$

in cui l'apice sta ad indicare che nella sommatoria deve essere escluso il termine corrispondente ai due valori uguali degli indici.

È da osservare che la forma presentata dalle (42) consente un metodo di iterazione per il calcolo delle H e K, che sicuramente converge per β abbastanza piccolo: ottenuta una prima determinazione $H^{(1)}$, $K^{(1)}$, trascurando nella (42) i termini in L, una seconda determinazione si ottiene assumendo per le L i valori ottenuti ponendo a secondo membro delle (44) per le H e K le $H^{(1)}$ e $K^{(1)}$ e risolvendo di nuovo il sistema (42) e così via.

9. — *Determinazione delle costanti λ_1 e λ_2.*

I risultati ottenuti precedentemente permettono di scrivere la soluzione dell'equazione (29) nella forma

$$(45)\qquad \eta(z) = \lambda_1 \eta_1(z) + \lambda_2 \eta_2(z)$$

in cui η_1 e η_2 sono funzioni note; si ricava perciò:

$$r_1 - \frac{1}{B} = \int_0^z \eta(z) d(z) = \lambda_1 \int_0^z \eta_1(z) dz + \lambda_2 \int_0^z \eta_2(z) dz$$

e perciò deve essere

$$(46) \qquad \frac{1}{B}\,\frac{R_2 - R_1}{R_1} = \lambda_1 \int_0^{l_1} \eta_1(z)dz + \lambda_2 \int_0^{l_1} \eta_2(z)dz$$

mentre dalla (23) risulta

$$(47) \qquad \lambda_1 \int_0^{l_1} dz \int_0^{z} \eta_1(s)ds + \lambda_2 \int_0^{l_1} dz \int_0^{z} \eta_2(s)ds = C$$

che permettono di calcolare le λ_1 e λ_2.

10. — *Risoluzione dell'equazione integrale* (29′).

Se l'equazione integrale da risolvere è la (29′) invece della (29), applicando, in modo analogo a quanto esposto nei numeri precedenti, il metodo del Goursat per la sua soluzione, si ottiene la $\varphi(\theta)$ nella forma:

$$(48) \qquad \varphi(\theta) = \lambda_1 + 2\lambda_2' l_1^* \theta (1 + \beta B l_1^* \theta) + + l_1^*(1 + 2\beta B l_1^* \theta)\left[\sum_0^m{}_n A_n H_n \cos n\theta + \sum_1^m{}_k K_k \operatorname{sen} k\theta\right]$$

in cui valgono per la determinazione delle A e delle H e K le stesse equazioni (37), (37′), (42) colla sola variante che i coefficienti termini noti delle equazioni (42), che qui si indicano con B_n^* e C_n^*, sono definiti, invece che dalle (41), dalle

$$B_n^* = \int_0^{\pi} (\lambda_1 + 2\lambda_2' l_1^* \theta)(1 + \beta B l_1^* \theta) \cos n\theta d\theta =$$

$$= -\, 2 l_1^* \lambda_2' \frac{2}{n^2} - \beta B l_1^* \frac{2\lambda_1}{n^2} - \beta B l_1^{*2} 2\lambda_2' \frac{2\pi}{n^2} \qquad \text{per } n \text{ dispari}$$

$$= \beta B l_1^{*2} 2\lambda_2' \frac{2\pi}{n^2} \qquad \text{per } n \text{ pari}$$

$$= \lambda_1 \left[\pi + \beta B l_1^* \frac{\pi^2}{2}\right] + \lambda_2' \left(l_1^* \pi^2 + \frac{2}{3} \beta B l_1^{*2} \pi^3\right) \qquad \text{per } n = 0$$

$$C_n^* = \int_0^{\pi} (\lambda_1 + 2\lambda_2' l_1^* \theta)(1 + \beta B l_1^* \theta) \operatorname{sen} n\theta d\theta =$$

$$= \lambda_1 \left[\frac{2}{n} + \beta B l_1^* \frac{\pi}{n}\right] + \lambda_2' \left[2 l_1^* \frac{\pi}{n} + 2\beta B l_1^{*2} \left(\frac{\pi^2}{n} - \frac{4}{n^3}\right)\right] \qquad \text{per } n \text{ dispari}$$

$$= -\, \beta B l_1^* \frac{\pi}{n} \lambda_1 - \lambda_2' \left|2 l_1^* \frac{\pi}{n} + 2 l_1^{*2} \beta B \frac{\pi^2}{n}\right| \qquad \text{per } n \text{ pari}$$

$$= 0 \qquad \text{per } n = 0.$$

Posto poi, come prima,

$$\eta(z) = \lambda_1\eta_1(z) + \lambda_2'\eta_2(z)$$

valgono ora, per la determinazione delle costanti λ_1 e λ_2', le

$$(46^{\text{rip}}) \qquad \frac{1}{B}\,\frac{R_2 - R_1}{R_1} = \lambda_1\int_0^{l_1}\eta_1(z)dz + \lambda_2'\int_0^{l_1}\eta_2(z)dz$$

$$(49) \qquad \lambda_1\int_0^{l_1}(1 + \beta Bz)dz\int_0^z \eta_1(s)ds + \lambda_2'\int_0^{l_1}(1 + \beta Bz)dz\int_0^s \eta_2(s)ds = D\,.$$

11. — *Caso di* $\beta = 0$.

Nel caso semplice di $\beta = 0$, la funzione S^* si riduce alla funzione $W(|s-z|)$ calcolata da Lighthill [1]: si sostituisca ad essa un polinomio trigonometrico, che in un numero $m+1$ prefissato di valori $|z-s|$, nell'intervallo $0 \div l_1$, assuma gli stessi valori della W, ossia si ponga

$$(50) \qquad W(|z-s|) = \sum_0^m {}_n A_n \cos\left[\frac{n\pi}{l_1}\,(z-s)\right]$$

in cui per le formule di De La Vallée-Poussin [5] è

$$(51) \qquad \begin{cases} A_n = \dfrac{2}{m}\displaystyle\sum_{r=1}^{m-1} W\left(\frac{rl}{m}\right)\cos\frac{nr\pi}{m} + \dfrac{W(0) + (-1)^n W(l)}{m} \qquad (n = 0, 1, \ldots m-1) \\[2ex] A_m = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{2}{m}\displaystyle\sum_{r=1}^{m-1}(-1)^r W\left(\frac{rl}{m}\right) + \dfrac{W(0) + (-1)^m W(l)}{m}\right\}. \end{cases}$$

Il procedimento indicato in (6) (e in 10) ha così una semplificazione essenziale, perchè le A risultano di immediata calcolazione; è poi senz'altro chiaro che le A_n e A_{m+k} per $n = k$ sono tra loro uguali, mentre un'altra essenziale semplificazione si ha nelle equazioni (42) quando in esse si ponga $\beta = 0$.

PARTE II.

1. — La risoluzione del problema considerato nella Parte I può pure essere fatta con procedimento analogo a quello applicato dallo scrivente nello studio della forma del solido di minima resistenza [2], e che differisce, per il problema ora in esame, da quello applicato nella Parte I sostanzialmente in questo, che con esso si viene a determinare la distribuzione delle sorgenti iperboliche corrispondenti al contorno di minima resistenza, invece che direttamente detto contorno.

---

[5] L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, cap. III, pag. 148.

2. — *Calcolo della resistenza esterna.*

Per ottenere l'espressione formale del coefficiente di resistenza esterna, si considera la massa fluida compresa tra i due piani AA_0A', BB_0B' normali all'asse x (fig. 2) (a cui appartengono le sezioni di ingresso e di uscita del condotto), un cilindro circolare σ di raggio R' arbitrario, coassiale con x, e la superficie esterna del condotto stesso; si applica quindi a detta

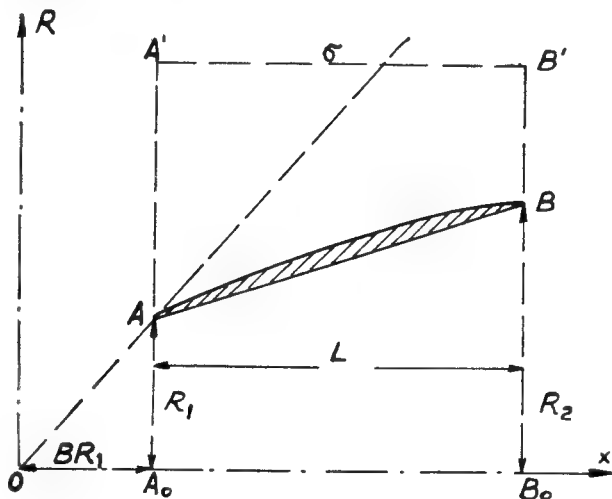



Fig. 2.

massa il teorema della quantità di moto. Se con Q_2dt, $Q'dt$, Q_1dt si indicano rispettivamente le componenti secondo x delle quantità di moto delle masse fluide uscenti in un intervallo di tempo elementare dt da BB' e dalla superficie cilindrica σ, ed entrante da AA', mentre F_D è la *resistenza* corrispondente al contorno AB, e F_p la componente secondo x della forza dovuta alla pressione su AA' e BB', si ha

$$F_D = F_p - Q_2 - Q' + Q_1 . \tag{1}$$

Ora, se U_x e U_r sono rispettivamente le componenti assiale e radiale di $\vec{U}$, si ha

$$\begin{aligned} Q' + Q_2 - Q_1 = \\ = 2\pi R' \int_{x_A}^{x_B} \varrho U_x U_r dx + 2\pi \int_{R_2}^{R'} \varrho R U_x^2 dR - \pi \varrho_\infty U_\infty (R'^2 - R_1^2) ; \end{aligned} \tag{2}$$

d'altra parte per l'equazione di continuità è pure

$$- \varrho_\infty \frac{U_\infty}{2} (R'^2 - R_1^2) + \int_{R_2}^{R'} \varrho R U_x dR + R' \int_{x_A}^{x_B} \varrho U_r dx = 0 . \tag{3}$$

Si pone

$$U_x = U_\infty + u \tag{4}$$

$$\varrho = \varrho_\infty + \left(\frac{d\varrho}{dU}\right)_{U=U_\infty} (U - U_\infty) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varrho}{dU^2}\right)_{U=U_\infty} (U - U_\infty)^2 =$$

$$= \varrho_\infty \left\{1 - M_\infty^2 \left(\frac{u}{U_\infty} + \frac{1}{2}\frac{U_r{}^2}{U_\infty^2}\right) + \frac{1}{2}\left[(2-\gamma)M_\infty^4 - M_\infty^2\right]\frac{u^2}{U_\infty^2}\right\}.$$

Si ricava

$$\frac{Q' + Q_2 - Q_1}{2\pi} = \varrho_\infty U_\infty \int_{R_2}^{R'} \left(u - B^2 \frac{u^2}{U_\infty^2}\right) R dR + R' \varrho_\infty \int_{x_A}^{x_B} u U_r dx . \tag{5}$$

È poi

$$- F_p = \int_{R_2}^{R'} (p - p_\infty) R dR$$

e poichè

$$p - p_\infty = - \varrho_\infty U_\infty u - \varrho_\infty \frac{u^2}{2} - \varrho_\infty \frac{U_r{}^2}{2} + \varrho_\infty M_\infty \frac{u^2}{2}$$

si ha

$$F_p = \varrho_\infty U_\infty \int_{R_2}^{R'} R u dR - \frac{1}{2}\varrho_\infty \int_{R_2}^{R'} u^2 B^2 R dR + \frac{1}{2}\varrho_\infty \int_{R_2}^{R'} R U_r{}^2 dR$$

da cui per la (1)

$$F_D = 2\pi \int_{x_A}^{x_B} (p - p_\infty) R \frac{dR}{dx} dx = - \varrho_\infty R' \int_{x_A}^{x_B} u U_r dx + \frac{1}{2}\varrho_\infty \int_{R_2}^{R'} R(B^2 u^2 + U_r{}^2) dR .$$

Assumendo $R' = R_2$, il che sembra lecito se lo *spessore* del condotto al di sopra del cono cui appartengono AA_0 e BB_0 è abbastanza piccolo,

$$F_D = - \varrho_\infty R_2 U_\infty^2 \int_{x_A}^{x_B} \frac{u}{U_\infty} \frac{U_r}{U_\infty} dx$$

da cui

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\varrho_\infty \pi R_0{}^2 U_\infty^2} = - \frac{2}{\pi}\frac{R_2{}^2}{R_0{}^2} \int_{x_A}^{x_B} \frac{u}{U_\infty}\frac{U_r}{U_\infty} d\frac{x}{R_2} .$$

Ora è

$$\frac{u}{U_\infty} = - \int_0^{x - BR_2} \frac{\dot f(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2 R_2{}^2}} ; \qquad \frac{U_r}{U_\infty} = \frac{1}{R_2}\int_0^{x-BR_2} \frac{(x-\xi)\dot f(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - B^2 R_2{}^2}}$$

colle stesse notazioni della Parte I; e pertanto si ha, posto

$$L_2 = L(1 - \beta B)$$

$$C_D = \frac{2}{\pi}\frac{R_2{}^2}{R_0{}^2} \int_{BR_2}^{L_2 + BR_2} \frac{dx}{R_2} \int_0^{x-BR_2} \frac{d\xi_1}{R_2} \int_0^{x - BR_2} \frac{\dot f(\xi_1) \dot f(\xi_2) d\xi_2}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 - B^2 R_2{}^2}\sqrt{(x-\xi_2)^2 - B^2 R_2{}^2}} \tag{6}$$

ed effettuando prima l'integrazione rispetto a x

$$(6') \quad C_D = \frac{2}{\pi R_0^2}\int_0^{L_2} \dot{f}(\xi_1)d\xi_1 \left[\int_{\xi_1}^{L_2} \dot{f}(\xi_2)d\xi_2 \int_{\xi_2+BR_2}^{L_2+BR_2} \frac{(x-\xi_2)dx}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 - B^2R_2^2}\sqrt{(x-\xi_2)^2 - B^2R_2^2}} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\xi_1} \dot{f}(\xi_2)d\xi_2 \int_{\xi_1+BR_2}^{L_2+BR_2} \frac{(x-\xi_2)dx}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 - B^2R_2^2}\sqrt{(x-\xi_2)^2 - B^2R_2^2}}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi R_0^2}\int_0^{L_2} \dot{f}(\xi_2)d\xi_2 \left[\int_{\xi_2}^{L_2} \dot{f}(\xi_1)d\xi_1 \int_{\xi_1+BR_2}^{L_2+BR_2} \frac{(x-\xi_2)dx}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 - B^2R_2^2}\sqrt{(x-\xi_2)^2 - B^2R_2^2}} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\xi_2} \dot{f}(\xi_1)d\xi_1 \int_{\xi_2+BR_2}^{L_2+BR_2} \frac{(x-\xi_2)dx}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 - B^2R_2^2}\sqrt{(x-\xi_2)^2 - B^2R_2^2}}\right].$$

Si ha:

$$(7) \qquad H_2(t_1, t_2) = \int_{\xi_2+BR_2}^{L_2+BR_2} \frac{(x-\xi_2)dx}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 - B^2R_2^2}\sqrt{(x-\xi_2)^2 - B^2R_2^2}} =$$

$$= \int_{1+t_2}^{1+l_2^*} \frac{(z_2 - t_2)dz_2}{\sqrt{(z_2-t_2)^2 - 1}\sqrt{(z_2-t_1)^2 - 1}}$$

se

$$(7') \qquad z_2 = \frac{x}{BR_2}; \quad t_2 = \frac{\xi_2}{BR_2}; \quad t_2 = \frac{\xi_1}{BR_2}; \quad l_2^* = \frac{L_2}{BR_2} = l_2(1 - \beta B).$$

Analogamente è

$$(8) \qquad H_1(t_1, t_2) = \int_{\xi_1+BR_2}^{L_2+BR_2} \frac{(x-\xi_2)dx}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 - B^2R_2^2}\sqrt{(x-\xi_2)^2 - B^2R_2^2}} =$$

$$= \int_{1+t_1}^{1+l_2^*} \frac{(z_2 - t_2)dz_2}{\sqrt{(z_2-t_1)^2 - 1}\sqrt{(z_2-t_2)^2 - 1}}.$$

Si scrive

$$(9) \qquad C_D = \frac{2}{\pi} B^2 \frac{R_2^2}{R_0^2} \int_0^{l_2^*} \dot{f}(t_1)dt_1 \int_0^{l_2^*} \dot{f}(t_2)H(t_1, t_2)dt_2 =$$

$$= \frac{2B^2}{\pi}\frac{R_2^2}{R_0^2} \int_0^{l_2^*} \dot{f}(t_2)dt_2 \int_0^{l_2^*} \dot{f}(t_1)H(t_1, t_2)dt_1$$

convenendo che l'intervallo $0 \div l_2^*$ di integrazione sia di $\dot{f}(t_1)H(t_1, t_2)$, sia di $\dot{f}(t_2)H(t_1, t_2)$ deve essere scisso in due parti $(0 \div t_1;\ t_1 \div l_2^*)$ per la prima espressione di C_D; $(0 \div t_2;\ t_2 \div l_2^*)$ per la seconda espressione di C_D, in ognuna delle quali H è uguale a H_1, oppure a H_2, a seconda che $t_2 < t_1$, oppure $t_2 > t_1$. Ora si ricava, posto

$$(10) \qquad \zeta = z_2 - \frac{t_2 + t_1}{2}$$

$$(11)\qquad \underset{1}{H_2}(t_1,t_2) = \int_{1+\frac{t_2}{t_1}}^{1+l_2^*} \frac{(z_2-t_2)dz_2}{\sqrt{(z_2-t_1)^2-1}\,\sqrt{(z_2-t_2)^2-1}} =$$

$$= \int_{1\pm\frac{t_2-t_1}{2}}^{1+l_2^*-\frac{t_2+t_1}{2}} \frac{\left(\zeta-\frac{t_2-t_1}{2}\right)d\zeta}{\sqrt{\left(\zeta-\frac{t_2-t_1}{2}-1\right)\left(\zeta-\frac{t_2-t_1}{2}+1\right)\left(\zeta+\frac{t_2-t_1}{2}-1\right)\left(\zeta+\frac{t_2-t_1}{2}+1\right)}} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{arcosh}\,\frac{(1+l_2^*-t_2)(1+l_2^*-t_1)-1}{|t_2-t_1|} -$$

$$-\frac{t_2-t_1}{2}\int_{1\pm\frac{t_2-t_1}{2}}^{1+l_2^*-\frac{t_2+t_1}{2}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\left(\zeta-\frac{t_2-t_1}{2}-1\right)\left(\zeta-\frac{t_2-t_1}{2}+1\right)\left(\zeta+\frac{t_2-t_1}{2}-1\right)\left(\zeta+\frac{t_2-t_1}{2}+1\right)}}$$

in cui si deve prendere il segno $+$ oppure quello $-$, a seconda che è $t_2 \gtrless t_1$. Si ha in definitiva

$$(12)\quad \underset{1}{H_2}(t_1,t_2) = \frac{1}{2}\,\text{arcosh}\,\frac{(1+l_2^*-t_2)(1+l_2^*-t_1)-1}{|t_2-t_1|} - \frac{t_2-t_1}{2}H^*(t_1,t_2)$$

avendo indicato con H^* l'integrale a secondo membro della (12), che è notoriamente riducibile a un integrale ellittico incompleto di prima specie, ma che qui non interessa determinare esplicitamente: solo interessa mettere in evidenza la proprietà che è

$$(13)\qquad H^*(t_1,t_2) = H^*(t_2,t_1).$$

3. — *Determinazione della legge di distribuzione delle sorgenti supersoniche corrispondenti a* $(C_D)_{\min}$.

Dalla

$$R_e\frac{dR_e}{dx} \simeq \int_0^{x-BR} \frac{(x-\xi)\dot{f}(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-B^2[R_1+\beta(x-BR_1)]^2}}$$

(in cui, per brevità, il limite superiore dell'integrale si è indicato con $x-BR$)

si ha, posto $\tau = \dfrac{R_1}{R_2}$

$$(14)\quad \frac{R_e^2-R_1^2}{2BR_2^2} = B\int_\tau^{z_2} dt_1 \int_0^{(t_1-\tau)(1-\beta B)} \frac{(t_1-t_2)\dot{f}(t_2)dt_2}{\sqrt{(t_1-t_2)^2-[\tau+\beta B(t_1-\tau)]^2}} =$$

$$= B\int_0^{(z_2-\tau)(1-\beta B)} \dot{f}(t_2)dt_2 \int_{\frac{t_2}{1-\beta B}+\tau}^{z_2} \frac{(t_1-t_2)dt_1}{\sqrt{(t_1-t_2)^2-[\tau+\beta B(t_1-\tau)]^2}} =$$

$$= \frac{B}{\sqrt{1-\beta^2B^2}}\int_0^{(z_2-\tau)(1-\beta B)} \dot{f}(t_2)I(z_2,t_2)dt_2$$

essendo

(15) $$I(z_2,t_2) = \sqrt{(z_2 - t_2)^2 - [\tau + \beta B(z_2 - \tau)]^2} +$$

$$+ \frac{\beta B[\tau(1 - \beta B) + \beta B t_2]}{\sqrt{1 - \beta^2 B^2}} \operatorname{arcosh} \frac{(1 - \beta^2 B^2)(z_2 - t_2) - \beta B[\tau + \beta B(t_2 - \tau)]}{\tau(1 - \beta B) + \beta B t_2}.$$

D'altra parte si può scrivere

$$\frac{R_e - R}{BR_2} \simeq \frac{R_e^2 - R_1^2}{2BR_2^2} \frac{1}{\tau + \beta B(z_2 - \tau)} -$$

$$- \frac{1}{2B} \frac{R_e^2 - R_1^2}{R_2^2} \frac{1}{\tau + \beta B(z_2 - \tau)} - \frac{1}{2B}[\tau + \beta B(z_2 - \tau)] + \frac{\tau^2}{2B[\tau - \beta B(z_2 - \tau)]}$$

da cui risulta

(16) $$\int_{BR_1}^{BR_1 + L} \frac{R_e - R}{BR_2} dx =$$

$$= \frac{B^2 R_2}{\sqrt{1 - \beta^2 B^2}} \int_\tau^{\tau + l_2} \frac{dz_2}{\tau + \beta B(z_2 - \tau)} \int_0^{(z_2 - \tau)(1 - \beta B)} \dot{f}(t_2) I(z_2, t_2) dt_2 + \text{costante} =$$

$$= \frac{B^2 R_2}{\sqrt{1 - \beta^2 B^2}} \int_0^{l_2^*} \mathfrak{J}(t_2) \dot{f}(t_2) dt_2 + \text{costante}$$

posto

(17) $$\mathfrak{J}(t_2) = \int_{\frac{t_2}{1 - \beta B_1} + \tau}^{\tau + \frac{l_2^*}{1 - \beta B}} \frac{I(z_2, t_2) dz_2}{\tau + \beta B(z_2 - \tau)}.$$

La condizione (a) del n. 1 della Parte I si esprime quindi ora colla

(18) $$\int_0^{l_2^*} \mathfrak{J}(t_2) \dot{f}(t_2) dt_2 = C.$$

Si ha poi

(19) $$\int_{BR_1}^{BR_1 + L} \frac{R_e^2 - R_1^2}{2BR_2^2} dx = \frac{B^2 R_2}{\sqrt{1 - \beta B}} \int_\tau^{\tau + l_2} dz_2 \int_0^{(z_2 - \tau)(1 - \beta B)} \dot{f}(t_2) I(z_2, t_2) dt_2 =$$

$$= \frac{B^2 R_2}{\sqrt{1 - \beta B}} \int_0^{l_2^*} \dot{f}(t_2) dt_2 \int_{\frac{t_2}{1 - \beta B} + \tau}^{\tau + \frac{l_2^*}{1 - \beta B}} I(z_2, t_2) dz_2 = \frac{B^2 R_2}{\sqrt{1 - \beta B}} \int_0^{l_2^*} \mathfrak{J}^*(t_2) \dot{f}(t_2) dt_2$$

in cui è

(20) $$\mathfrak{J}^*(t_2) = \int_{\frac{t_2}{1 - \beta B} + \tau}^{\tau + \frac{l_2^*}{1 - \beta B}} I(z_2, t_2) dz_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2 B^2}} \Big\{ 1 + \frac{\beta B[\tau(1 - \beta B) + \beta B t_2]}{1 - \beta^2 B^2} [(1 + \beta B) l_2^* - t_2 +$$

$$+ \tau(1 - \beta B)] \Big\} \operatorname{arcosh} \frac{(1 + \beta B) l_2^* - t_2 + \tau(1 - \beta B)}{\beta B t_2 + \tau(1 - \beta B)} -$$

$$- \frac{\beta B[\tau(1 - \beta B) + \beta B t_2]}{\sqrt{1 - \beta B}\,(1 - \beta^2 B^2)} \sqrt{(l_2^* - t_2)[(1 + \beta B) l_2^* + (1 - \beta B)(2\tau - t_2)} \Big\}.$$

La condizione (*b*) della Parte I si esprime pertanto colla

$$\int_0^{l_2^*} \mathfrak{J}^*(t_2)\dot{f}(t_2)dt_2 = D\,. \tag{21}$$

Infine deve essere

$$\frac{R_2^2 - R_1^2}{2BR_2^2} = \frac{B}{\sqrt{1-\beta^2B^2}}\int_0^{l_2^*} \dot{f}(t_2) I\left(\frac{l_2^*}{1-\beta B} + \tau, t_2\right) dt_2 = \text{costante.} \tag{22}$$

La variazione prima del coefficiente C_D corrispondente alla variazione $\Delta\dot{f}(t_2)$ della funzione $\dot{f}(t_2)$ risulta dalla (14)

$$\begin{aligned} \Delta C_D &= \frac{2B^2}{\pi}\frac{R_2^2}{R_0^2}\left[\int_0^{l_2^*}\Delta\dot{f}(t_1)dt_1\int_0^{l_2^*}\dot{f}(t_2)H(t_1,t_2)dt_2 + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{l_2^*}\Delta\dot{f}(t_2)dt_2\int_0^{l_2^*}\dot{f}(t_1)H(t_1,t_2)dt_1\right] = \\ &= \frac{2B^2}{\pi}\frac{R_2^2}{R_0^2}\left[\int_0^{l_2^*}\Delta\dot{f}(t_1)dt_1\int_0^{l_2^*}\dot{f}(t_2)[H(t_1,t_2) + H(t_2,t_1)]\right]dt_2\,. \end{aligned} \tag{22'}$$

Ma è, tenendo presenti le (12) (13)

$$H(t_1,t_2) + H(t_2,t_1) = \operatorname{arcosh}\frac{(1 + l_2^* - t_2)(1 + l_2^* - t_1) - 1}{|t_2 - t_1|} \tag{23}$$

e pertanto si ha

$$\Delta C_D = \frac{2B^2}{\pi}\frac{R_2^2}{R_0^2}\int_0^{l_2^*}\Delta\dot{f}(t_1)\int_0^{l_2^*}\dot{f}(t_2)\operatorname{arcosh}\frac{(1+l_2^*-t_2)(1+l_2^*-t_1)-1}{|t_2-t_1|} = 0 \tag{24}$$

se la $\dot{f}(t_2)$ definisce proprio la legge di distribuzione delle sorgenti supersoniche corrispondenti a $(C_D)_{\min}$. Poichè le (18) (22) [oppure le (21) (22)] devono essere sempre soddisfatte dovrà pure essere

$$\int_0^{l_2^*}\Delta\dot{f}(t_1) I\left(\frac{l_2^*}{1-\beta B} + \tau, t_1\right) dt_1 = 0 \tag{25}$$

$$\int_0^{l_2^*}\Delta\dot{f}(t_1)\mathfrak{J}(t_1)dt_1 = 0 \tag{26}$$

e pertanto la $\dot{f}(t_2)$ dovrà soddisfare la [6]

$$\begin{aligned} &\int_0^{l_2^*}\dot{f}(t_2)\operatorname{arcosh}\frac{(1 + l_2^* - t_2)(1 + l_2^* - t_1) - 1}{|t_2 - t_1|}dt_2 + \\ &\quad + \lambda_1 I\left(\frac{l_2^*}{1-\beta B} + \tau, t_1\right) + \lambda_2\mathfrak{J}(t_1) = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

(6) H. M. PARKER, nella Nota citata [3], scrive il nocciolo dell'equazione integrale nella forma,

$$H(t_1, t_2) + H(t_2, t_1) = \int_{1+t_2}^{1+l_2^*}\frac{2z_2 - t_2 - t_1}{\sqrt{[(z_2 - t_2)^2 - 1][(z_2 - t_1)^2 - 1]}}\,dz_2\,,$$

che coincide esattamente con quello corrispondente alla (22'), ed effettua direttamente il calcolo di detto integrale, il che gli ha permesso di riconoscere subito la pseudoellitticità dell'integrale stesso.

mentre se è la (21), invece che la (18), che dovrà essere soddisfatta, varrà l'equazione analoga alla (27) colla sola sostituzione di $\mathfrak{J}^*(t_1)$ a $\mathfrak{J}(t_1)$.

4. — *Risoluzione dell'equazione integrale* (27).

L'equazione integrale (27) è facilmente riducibile all'equazione integrale che appare nella teoria dei profili alari, come ha mostrato il Parker: integrando infatti per parti l'integrale a primo membro della (27), e ponendo, come è lecito per il risultato dedotto nella Parte I, $f(0) = 0$, si ha

$$-\int_0^{l_2^*} \frac{f(t_2)}{\sqrt{(1 + l_2^* - t_2)^2 - 1}} \frac{dt_2}{t_2 - t_1} +$$

$$+ \lambda_1 \frac{I_1\left(\frac{l_2^*}{1 - \beta B} + \tau, t_1\right)}{\sqrt{(1 + l_2^{*2} - t_1)^2 - 1}} + \lambda_2 \frac{\mathfrak{J}(t_1)}{\sqrt{(1 + l_2^* - t_1^2) - 1}} = 0$$

che, posto

$$f^*(t_2) = \frac{f(t_2)}{\sqrt{(1 + l_2^* - t_2)^2 - 1}} . \tag{28}$$

ha proprio l'espressione

$$\int_0^{l_2^*} \frac{f^*(t_2)}{t_1 - t_2} dt_2 = \lambda_1 F_1(t_1) + \lambda_2 F_2(t_1) . \tag{29}$$

Posto

$$f^*(t_2) = \lambda_1 f_1^*(t_2) + \lambda_2 f_2^*(t_2) \tag{30}$$

la (29) si scinde nelle

$$\int_0^{l_2^*} \frac{f_1^*(t_2)}{t_1 - t_2} dt_2 = F_1(t_1) ; \qquad \int_0^{l_2^*} \frac{f_2^*(t_1)}{t_1 - t_2} dt_2 = F_2(t_1) . \tag{31}$$

Si ricava, essendo

$$t_2^* = t_2 - \frac{l_2^*}{2} ; \qquad t_1^* = t_1 - \frac{l_2^*}{2} \tag{32}$$

$$f_1^*(t_2^*) = \frac{\Gamma_1}{\sqrt{\frac{l_2^{*2}}{4} - t_2^{*2}}} - \tag{33}$$

$$- \frac{4}{\sqrt{\frac{l_2^{*2}}{4} - t_2^{*2}}} \int_{\frac{-l_2^*}{2}}^{\frac{l_2^*}{2}} \frac{F_1(t_1^*) \sqrt{\frac{l_2^{*2}}{4} - t_1^{*2}}}{(t_2^* - t_1^*) \sqrt{\left(1 + \frac{l_2^*}{2} - t_1^*\right)^2 - 1}} dt_1^*$$

mentre una formula analoga vale per la $f_2^*(t_2^*)$ e le costanti Γ_1 (per la f_1^*), Γ_2 (per la f_2^*) devono essere determinate in modo che sia

$$f_1^*\left(-\frac{l_2^*}{2}\right) = f_2^*\left(-\frac{l_2^*}{2}\right) = 0 . \tag{34}$$

Ora è

$$F_{\frac{1}{2}}\left(\frac{l_2^*}{2}\right) = 0 ; \qquad F_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{l_2^*}{2}\right) \neq 0$$

$$\lim_{t_1^* = \frac{l_2^*}{2}} \left[\frac{\frac{l_2^{*2}}{4} - t_1^{*2}}{\left(1 + \frac{l_2^*}{2} - t_1^*\right)^2 - 1}\right] = \frac{l_2^*}{2} ; \qquad \lim_{t_1^* = -\frac{l_2^*}{2}} \left[\frac{\frac{l_2^{*2}}{4} - t_1^{*2}}{\left(1 + \frac{l_2^*}{2} - t_1^*\right)^2 - 1}\right] = 0 .$$

Se perciò si pone

$$t_1^* = \frac{l_2^*}{2} \cos\theta \tag{35}$$

i può pure, per i valori di θ compresi nell'intervallo $0 \div \pi$, interpolare la

$$\varphi(t_1^*) = \frac{F_1(t_1^*)\sqrt{\frac{l_2^{*2}}{4} - t_1^{*2}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{l_2^*}{2} - t_1^*\right)^2 - 1}}$$ col polinomio trigonometrico

$$\varphi^*(\theta) = \sum\nolimits_\mu \varphi_\mu \operatorname{sen} \mu\theta \tag{36}$$

tale che negli m punti $\theta_n = \frac{n\pi}{m+1}$ (n variabile da 1 a m) è

$$\varphi^*(\theta_n) = \varphi(\theta_n) . \tag{37}$$

È, per la formula di Lagrange,

$$\varphi_\mu = \frac{2}{\mu + 1} \sum_{n=1}^{m} \varphi(\theta_n) \operatorname{sen} \mu\theta_n . \tag{38}$$

Si ha così, sostituendo alla $\varphi(\theta)$ la $\varphi^*(\theta)$,

$$\int_{-\frac{l_2^*}{2}}^{\frac{l_2^*}{2}} \frac{F_1(t_2^*)\sqrt{\frac{l_2^{*2}}{2} - t_1^{*2}}\, dt_1^*}{(t_2^* - t_1^*)\sqrt{\left(1 + \frac{l_2^*}{2} - t_1^*\right)^2 - 1}} \simeq \int_0^\pi \sum\nolimits_\mu \varphi_\mu \frac{\operatorname{sen}\mu\theta \cdot \operatorname{sen}\theta d\theta}{(\cos\theta' - \cos\theta)} = \tag{39}$$

$$= -\pi \sum_{1}^{m}{}_{\mu} \varphi_\mu \cos \mu\theta'$$

essendo

$$t_2^* = \frac{l_2^*}{2} \cos\theta' .$$

Sostituendo la (39) nella (33), e ponendo la condizione (34) si ricava

$$\Gamma_1 = -4\pi \sum_1^m{}_\mu (-1)^\mu \varphi_\mu ,$$

e pertanto è

$$\frac{l_2^*}{2} f_1^* = 4\pi \sum{}_\mu \frac{\cos\mu\theta' - (-1)^\mu}{\operatorname{sen}\theta'} \varphi_\mu , \tag{40}$$

e

$$\frac{l_2^*}{2} f_1 = 4\pi \sqrt{\left(1 + l_2^* \operatorname{sen}^2 \frac{\theta'}{2}\right)^2 - 1} \sum{}_\mu \frac{\cos\mu\theta' - (-1)^\mu}{\operatorname{sen}\theta'} \varphi_\mu . \tag{41}$$

Una formula del tutto analoga vale ovviamente per la f_2, mentre le costanti λ_1 e λ_2 devono essere determinate in base alle (18) (21).

Ottenuta la legge di distribuzione delle sorgenti supersoniche la forma della linea meridiana del condotto è data senz'altro dalla (14).

Parte III.

1. — *Applicazioni.*

Il metodo esposto nella Parte I è stato applicato assumendo

$$\beta B = 0{,}25 ; \qquad l_1 = 3 \tag{1}$$

e sono state determinate le forme esterne del condotto di minima resistenza per

a) $\beta = 0{,}25$; $B = 1$; $\dfrac{L}{R_1} = 3$

$\beta = 0{,}15$; $B = 1{,}666$; $\dfrac{L}{R_1} = 5$;

b) assumendo come *sola* condizione imposta alla linea meridiana di avere i suoi punti estremi N_1 e N_2 appartenenti al tronco di cono di lunghezza $\frac{L}{R_1}$, di semiangolo al vertice β, e le cui basi minore e maggiore hanno rispettivamente raggio 1 e raggio $\frac{R_2}{R_1} = 1 + \beta \frac{L}{R_1}$;

c) aggiungendo alla condizione (*b*) *una* delle seguenti altre condizioni:

1) area racchiusa tra il contorno e l'asse x uguale all'area racchiusa tra questo asse ed il segmento N_1N_2;

2) area racchiusa tra il contorno e la sua corda N_1N_2 uguale all'area racchiusa tra detta corda ed il contorno di equazione (rispetto ad un sistema di assi nel piano meridiano di cui l'asse R passa per N_1)

$$\frac{R}{R_1} = 1 + \beta \frac{x}{R_1} + 0,2 \frac{x}{R_1} - 0,2 \frac{x^2}{R_1^2} \frac{R_1}{L}$$

avente nel punto di ascissa $\frac{x}{L} = 0,5$ un valore di

$$\frac{\Delta R}{L} = \frac{R - (R_1 + 0,5\beta L)}{L} = 0,05L\,.$$

3) volume compreso tra il solido di rivoluzione avente la linea meridiana cercata ed il tronco di cono N_1N_2 uguale al volume compreso tra detto tronco di cono ed il solido di rivoluzione la cui linea meridiana ha l'equazione indicata in $c - 2$.

Si riportano qui solo i risultati principali dei calcoli fatti (7), mentre si rinvia per l'esposizione dei calcoli completi al Report CAL n. AF-814-A2.

2. — *Calcolo della funzione Γ^* e della distribuzione di sorgenti supersoniche corrispondenti a:*

$$\left\{\begin{aligned} \eta_n(z) &= \frac{\cos n\theta}{1 + \beta B \frac{l'}{\pi} \theta} \\ \eta_{m+k}(z) &= \frac{\operatorname{sen} k\theta}{1 + \beta B \frac{l_1}{\pi} \theta} \end{aligned}\right. \quad \text{nei punti del segmento } N_1N_2 \quad \begin{pmatrix} n = 0, 1, 2 \ldots 6 \\ k = 1, 2, \ldots 6 \end{pmatrix}.$$

Per i valori numerici di β e di B sopra indicati il primo nucleo $H(x)$ dell'equazione determinatrice di Γ^* risulta

$$H(x) = 0,45016 \frac{(1 + x)\mathbf{E} - \mathbf{F}}{x\sqrt{x + 1,6}}$$

I valori di Γ^* sono dati dalla tabella I (vedi pag. seguente) per x compreso nell'intervallo $0 \div 4,2$.

Corrispondentemente si sono dedotte per le $\eta_n(z)$ e $\eta_{m+k}(z)$ le intensità delle distribuzioni di sorgenti supersoniche $\frac{h^*(s)}{B}$, riportate nei dia-

(7) I calcoli sono stati fatti presso l'Ufficio Calcoli del Politecnico di Torino a cura della Dottoressa Lia Foà Errera, che qui ringrazio vivamente.

TABELLA I.

x	$H(x)$	$H^{(2)}(x)$	$H^{(3)}(x)$	$H^{(4)}(x)$	$H^{(5)}(x)$	$\Gamma^*(x)$
0	0,38433	0	0	0	0	0,38433
0,1	0,37109	0,01409	0,00026	0	0	0,35870
0,2	0,35913	0,02692	0,00100	0,00003	0	0,33583
0,3	0,34822	0,03865	0,00214	0,00008	0	0,31530
0,4	0,33824	0,04941	0,00360	0,00018	0,00001	0,29681
0,5	0,32903	0,05932	0,00534	0,00033	0,00002	0,28001
0,6	0,32056	0,06846	0,00732	0,00053	0,00003	0,26481
0,7	0,31266	0,07692	0,00948	0,00079	0,00005	0,25090
0,8	0,30535	0,08476	0,01180	0,00110	0,00008	0,23824
0,9	0,29850	0,09205	0,01425	0,00148	0,00012	0,22659
1	0,29209	0,09884	0,01681	0,00192	0,00017	0,21588
1,2	0,28042	0,11563	0,02311	0,00309	0,00032	0,19348
1,4	0,27003	0,13035	0,02975	0,00453	0,00053	0,17434
1,6	0,26071	0,14333	0,03660	0,00621	0,00080	0,15786
1,8	0,25228	0,15487	0,04356	0,00813	0,00115	0,14353
2	0,24462	0,16517	0,05058	0,01027	0,00158	0,13101
2,2	0,23763	0,17442	0,05759	0,01259	0,00208	0,12001
2,4	0,23118	0,18276	0,06455	0,01509	0,00267	0,11026
2,6	0,22524	0,19031	0,07143	0,01775	0,00333	0,10159
2,8	0,21974	0,19717	0,07822	0,02054	0,00408	0,09388
3	0,21462	0,20342	0,08489	0,02346	0,00490	0,08694
3,3	0,20755	0,21664	0,09805	0,02919	0,00655	0,07552
3,6	0,20116	0,22825	0,11075	0,03518	0,00840	0,06582
3,9	0,19532	0,23850	0,12299	0,04137	0,01045	0,05748
4,2	0,18995	0,24762	0,13478	0,04772	0,01268	0,05026

$$\Gamma^*(x) = H(x) - 0{,}89443\, H^{(2)}(x) + 0{,}8\, H^{(3)}(x) - 0{,}71554\, H^{(4)}(x) + 0{,}64\, H^{(5)}(x).$$

grammi di fig. 3 e fig. 4. La componente assiale della velocità

$$F_n = -\frac{B}{U_\infty}\frac{\partial \Phi_n}{\partial x}\,; \qquad F_k = -\frac{B}{U_\infty}\frac{\partial \Phi_k}{\partial x}$$

prodotta nei punti di $N_1 N_2$ da ciascuna delle distribuzioni delle sopraddette sorgenti supersoniche è data nei diagrammi delle figure 5-6, nei quali sono pure riportati i valori di

$$F_n^* = \frac{\cos n\theta}{1 + \beta B \dfrac{l_1}{\pi}\,\theta} \quad \text{e di} \quad F_k^* = \frac{\operatorname{sen} k\theta}{1 + \beta B \dfrac{l_1}{\pi}\,\theta}$$

corrispondenti alla formula di Ackeret per il calcolo della pressione: si riconosce dal confronto dei valori di F_n e di F_n^*, e di quelli di F_k e di F_k^*, che, in tutto l'intervallo $0 \div 3$ di z, essi differiscono sensibilmente tra loro solo per i più piccoli valori di n e di k, in accordo a quanto è dimostrato nel n. 7 (Parte I).

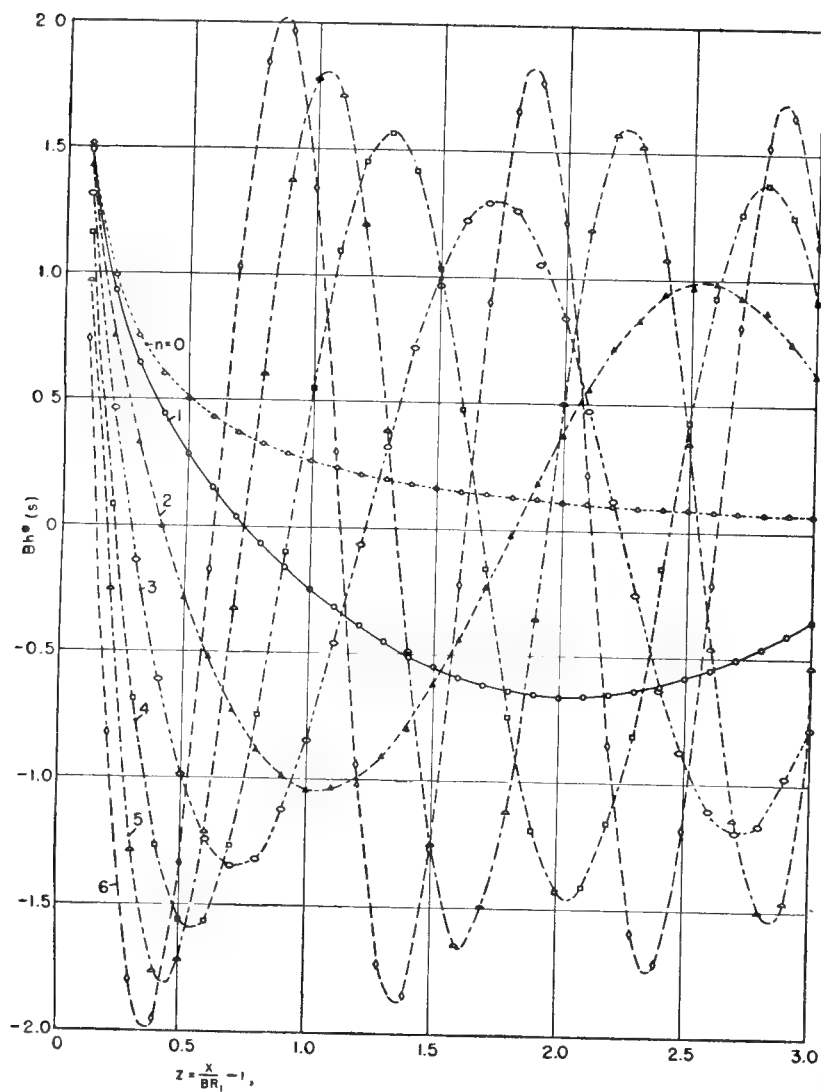



Fig. 3.
Coordinata ridotta lungo l'asse del condotto.

Componenti armoniche della funzione di distribuzione delle sorgenti supersoniche, $Bh^*(s)$, corrispondenti alla distribuzione delle velocità radiali

$$\eta_n = \frac{\cos n\theta}{1 + \beta B \frac{l_1}{\pi} \theta} .$$

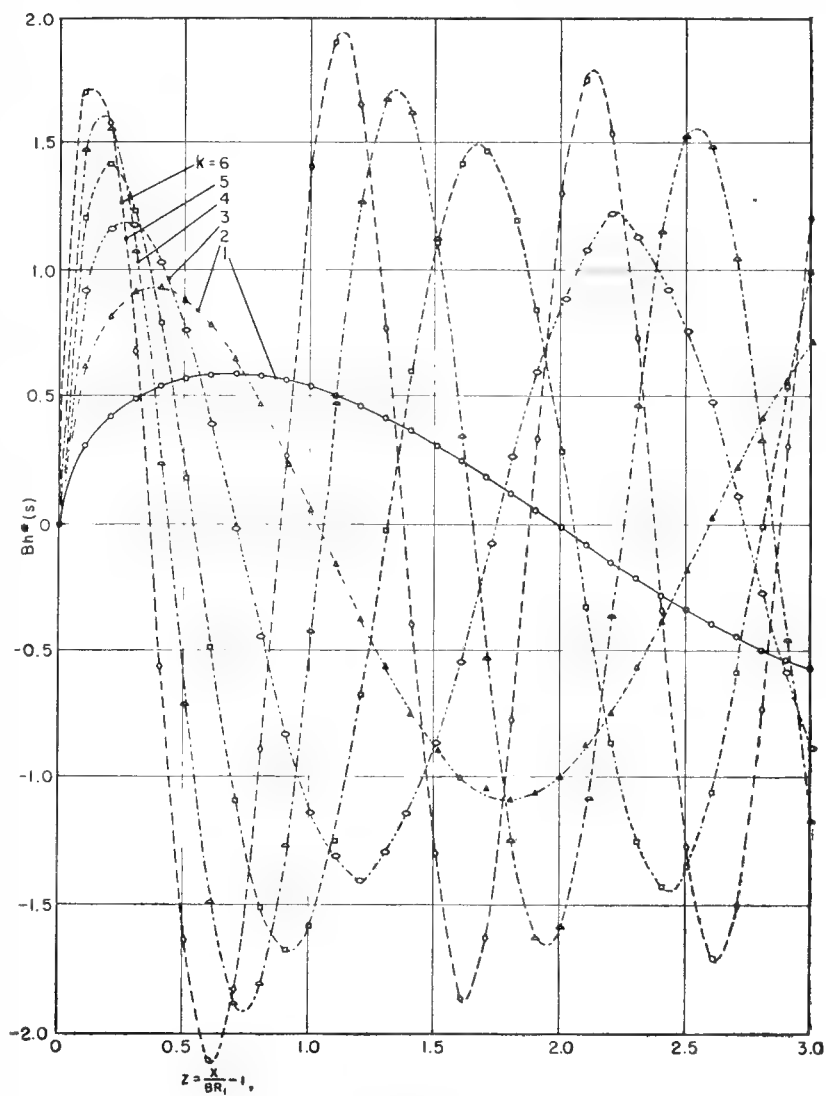



Fig. 4.
Coordinata ridotta lungo l'asse del condotto.

Componenti armoniche della funzione di distribuzione delle sorgenti supersoniche, $Bh^*(s)$, corrispondenti alla distribuzione delle velocità radiali

$$\eta_{m+k} = \frac{\operatorname{sen} k\theta}{1 + \beta B \frac{l_1}{\pi} \theta}.$$

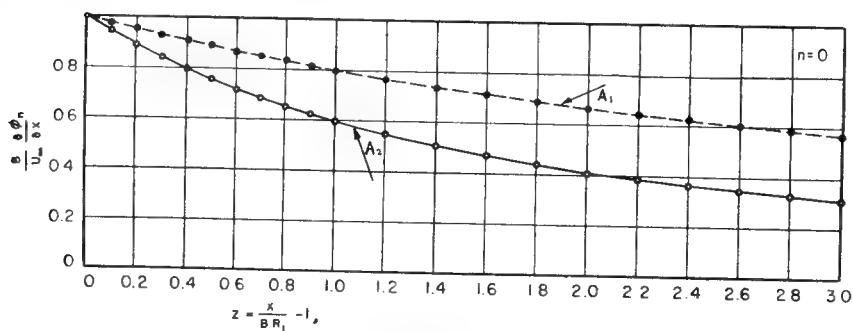



Fig. 5 *a*.
Coordinata assiale ridotta.

Componenti assiali della velocità indotta sulla superficie del condotto corrispondenti alla distribuzione delle velocità radiali

$$\eta_n = \frac{\cos n\theta}{1 + \beta B \left(\frac{l_1}{\pi}\right) \theta} .$$

—•—•— A_1 formula di Ackeret.
—○—○— A_2 formula n. 11.

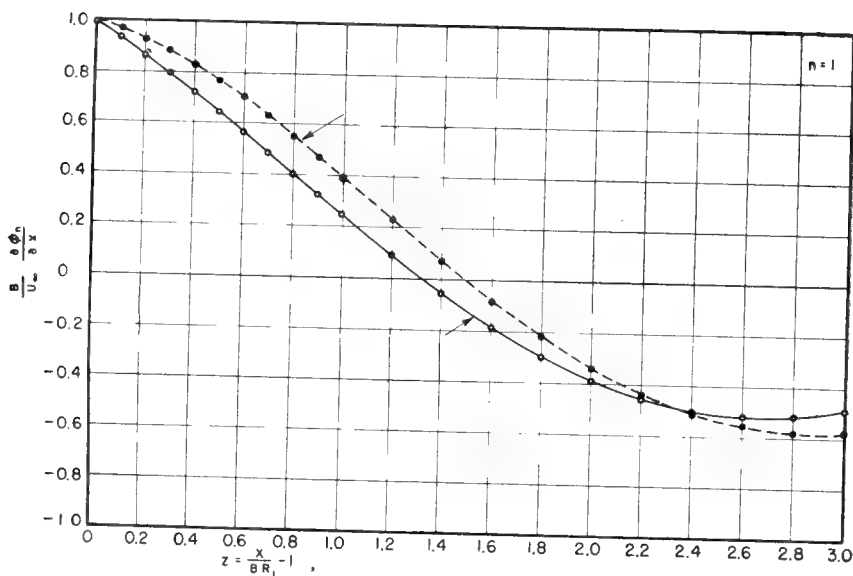



Fig. 5 *b*.
Coordinata assiale ridotta.

Componenti assiali della velocità indotta sulla superficie del condotto, corrispondenti alla distribuzione delle velocità radiali

$$\eta_n \quad \frac{\cos n\theta}{1 + \beta B \left(\frac{l_1}{\pi}\right) \theta} .$$

—•—•— formula di Ackeret.
—○—○— formula n. 11.

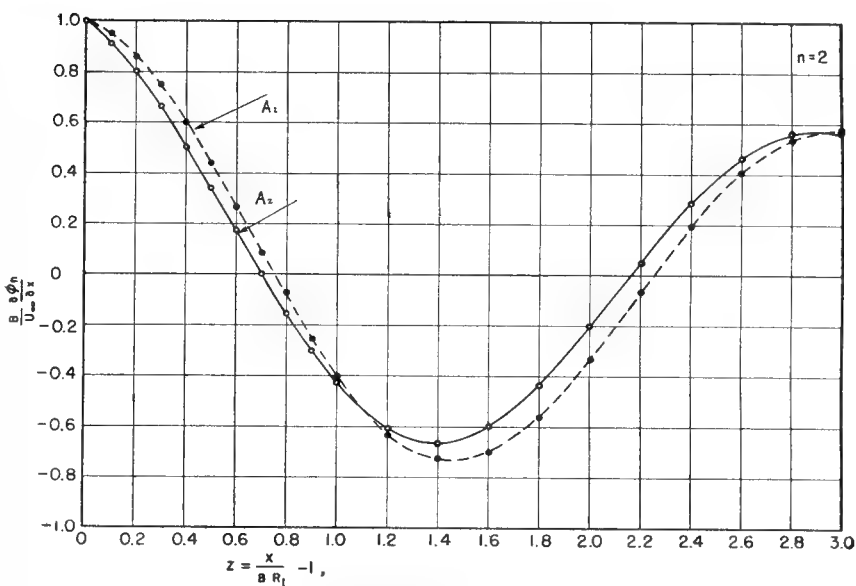



Fig. 5 *c*.
Coordinata assiale ridotta.

Componenti assiali della velocità indotta sulla superficie del condotto, corrispondenti alla distribuzione delle velocità radiali

$$\eta_n = \frac{\cos n\theta}{1 + \beta B\left(\frac{l_1}{\pi}\right)\theta}.$$

—•—•— A_1 formula di Ackeret.
—o—o— A_2 formula n. 11.

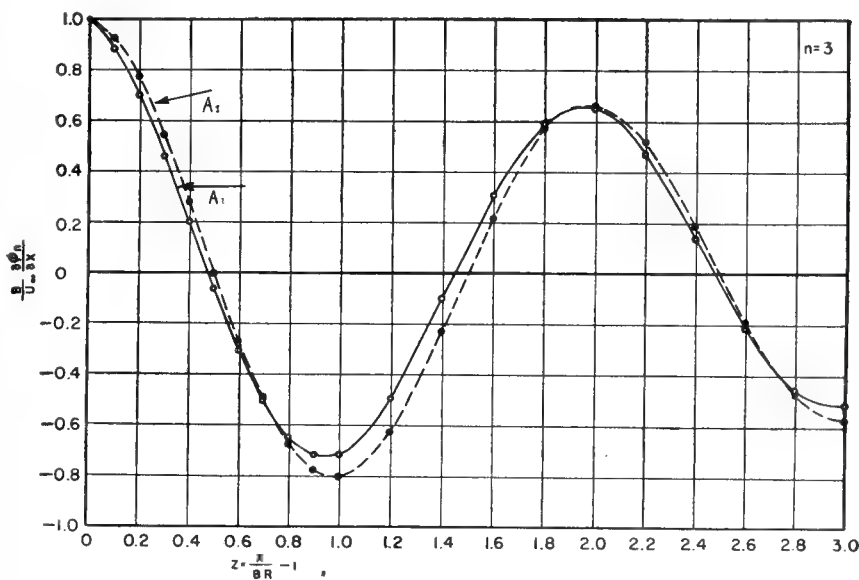



Fig. 5 *d*.
Coordinata assiale ridotta.

Componenti assiali della velocità indotta sulla superficie del fuso corrispondenti ad una distribuzione delle velocità radiali

$$\eta_n = \frac{\cos n\theta}{1 + \beta B\left(\frac{l_1}{\pi}\right)\theta}.$$

—•—•— A_1 formula di Ackeret.
—o—o— A_2 formula n. 11.

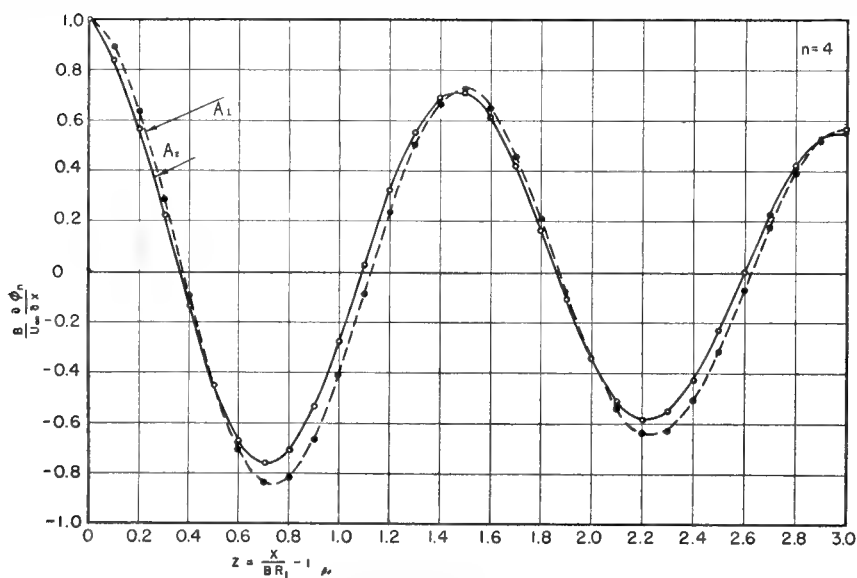



Fig. 5 *e*.
Coordinata assiale ridotta.

Componenti assiali della velocità indotta sulla superficie del condotto, corrispondenti ad una distribuzione delle velocità radiali

$$\eta_n = \frac{\cos n\theta}{1 + \beta B \left(\frac{l_1}{\pi}\right) \theta} \, .$$

—•—•— A_1 formula di Ackeret.
—o—o— A_2 formula n. 11.

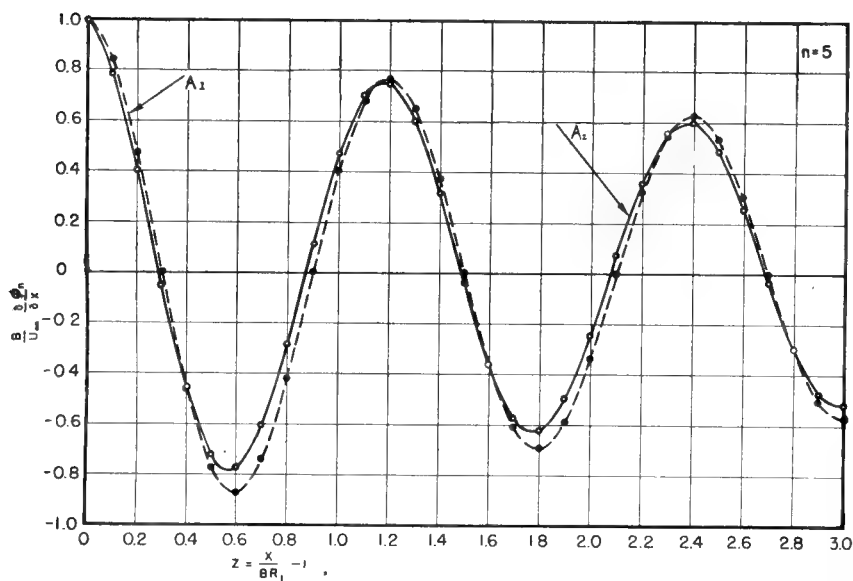



Fig. 5 *f*.
Coordinata assiale ridotta.

Componenti assiali della velocità indotta sulle superficie del condotto corrispondenti ad una distribuzione radiale delle velocità

$$\eta_n = \frac{\cos n\theta}{1 + \beta B \left(\frac{l_1}{\pi}\right) \theta} \, .$$

—•—•— formula di Ackeret.
—o—o— formula n. 11.

Fig. 5 *g*.
Coordinata assiale ridotta.

Componenti assiali della velocità indotta sulla superficie del condotto corrispondenti ad una distribuzione delle velocità radiali

$$\eta_n = \frac{\cos n\theta}{1 + \beta B \left(\frac{l_1}{\pi}\right) \theta} .$$

—●—●— A_1 formula di Ackeret.
—○—○— A_2 formula n. 11.

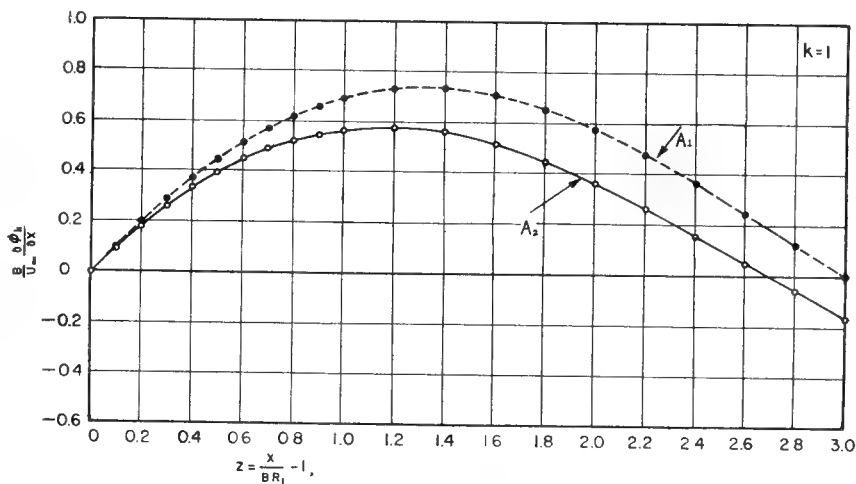



Fig. 6 *a*.
Coordinata assiale ridotta.

Componenti assiali della velocità indotta sulla superficie del condotto corrispondenti ad una distribuzione della velocità radiale

$$\eta_{m,k} = \frac{\operatorname{sen} k\theta}{1 + \beta B \left(\frac{l_1}{\pi}\right) \theta} .$$

—●—●— A_1 formula di Ackeret.
—○—○— A_2 formula n. 11.

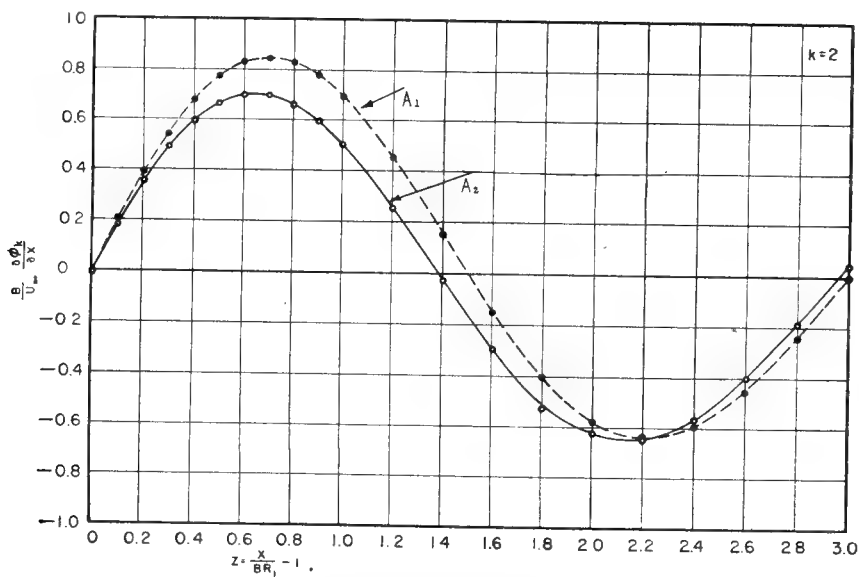



Fig. 6 *b*.
Coordinata assiale ridotta.

Componenti assiali della velocità indotta sulla superficie del condotto corrispondenti ad una distribuzione radiale delle velocità

$$\eta_{m+k} = \frac{\text{sen } k\theta}{1 + \beta B \left(\frac{l_1}{\pi}\right) \theta}.$$

—•—•— A_1 formula di Ackeret.
—○—○— A_2 formula n. 11.

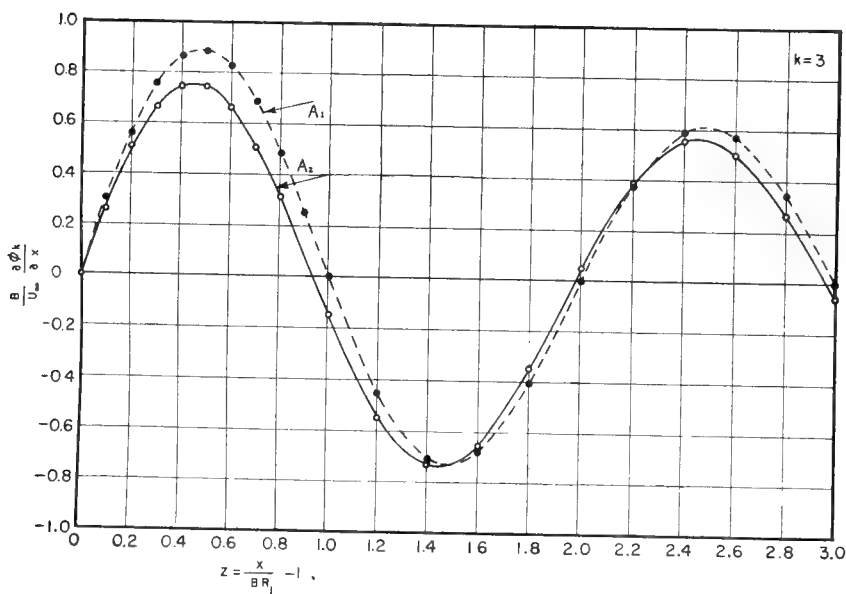



Fig. 6 *c*.
Coordinata assiale ridotta.

Componenti assiali della velocità indotta sulla superficie del fuso corrispondenti alla distribusione delle velocità radiali

$$\eta_{m+k} = \frac{\text{sen } k\theta}{1 + \beta B \left(\frac{l_1}{\pi}\right) \theta}.$$

—•—•— A_1 formula di Ackeret.
—○—○— A_2 formula n. 11.

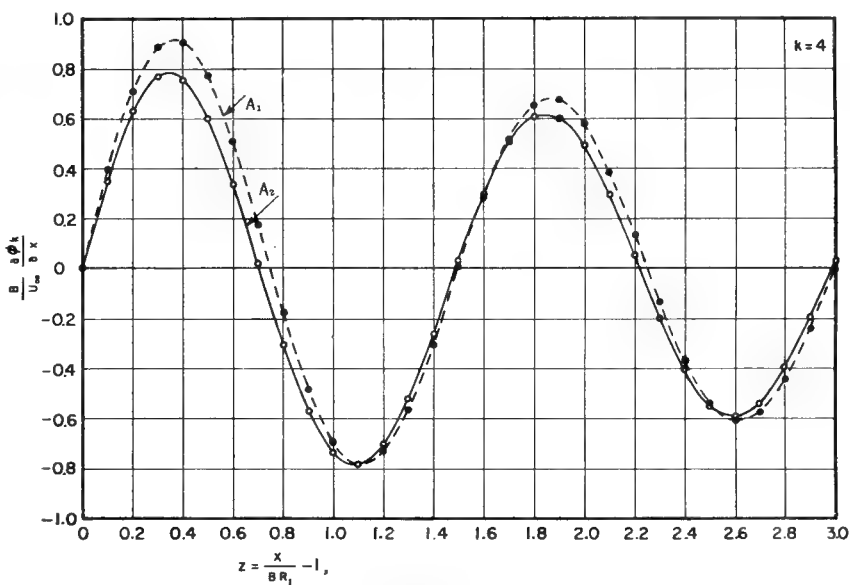



Fig. 6 *d*.
Coordinata assiale ridotta.

Componenti assiali della velocità indotta sulla superficie del condotto corrispondenti alla distribuzione delle velocità radiali

$$\eta_{m+k} = \frac{\operatorname{sen} k\theta}{1 + \beta B \left(\frac{l_1}{\pi}\right) \theta} .$$

—•—•— A_1 formula di Ackeret.
—○—○— A_2 formula n. 11.

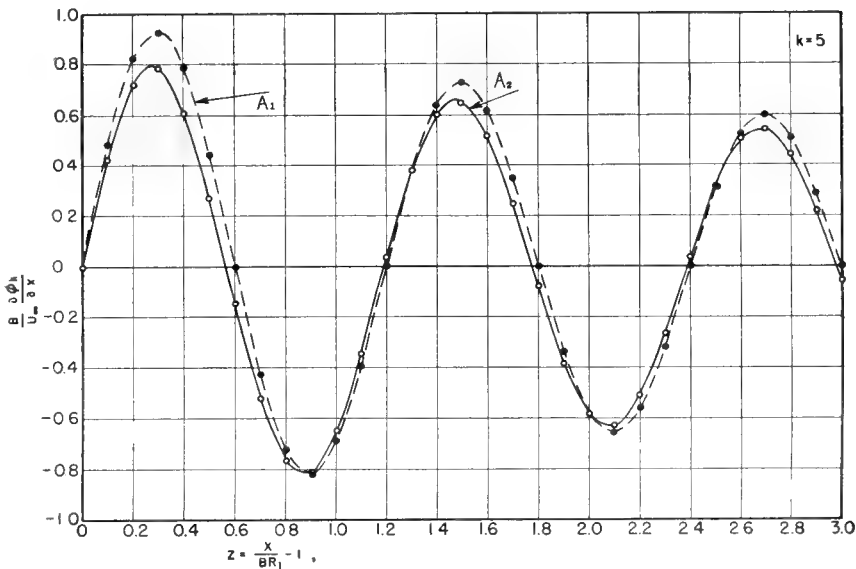



Fig. 6 *e*.
Coordinata assiale ridotta.

Componenti assiali della velocità indotta sulla superficie del condotto corrispondenti alla distribuzione delle velocità radiali

$$\eta_{m,k} = \frac{\operatorname{sen} k\theta}{1 + \beta B \left(\frac{l_1}{\pi}\right) \theta} .$$

—•—•— A_1 formula di Ackeret.
—○—○— A_2 formula n. 11.

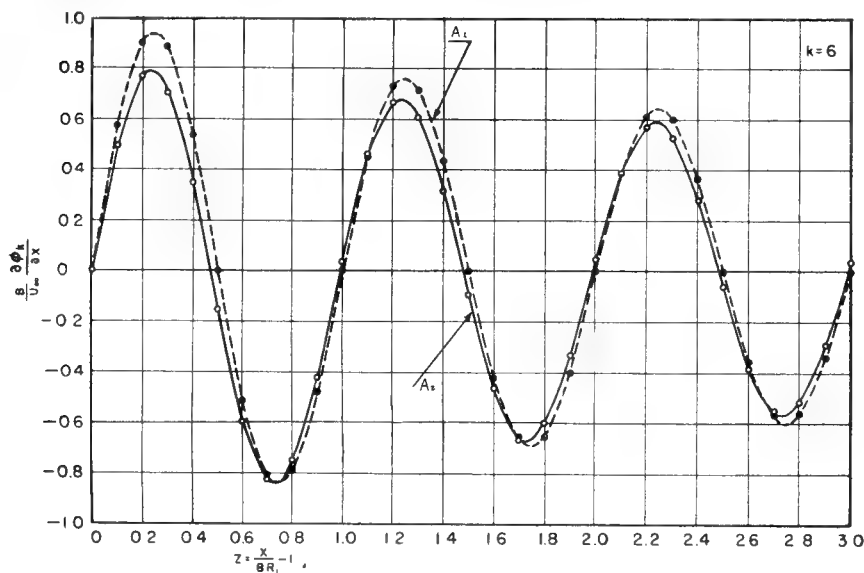



Fig. 6 *f*.
Coordinata ridotta lungo l'asse del condotto.

Componente assiale della velocità indotta sulla superficie del condotto per una velocità radiale corrispondente alla

$$\eta_{m+k} = \frac{\text{sen } k\theta}{1 + \beta B \left(\frac{l_1}{\pi}\right) \theta} .$$

—•—• A_1 ottenuta colla formula di Ackeret.
—o— A_2 ottenuta coll'equazione n. 11.

3. — *Calcolo delle costanti A_n e A_{m+k}.*

Dai valori delle F_n, F_n^*, e F_k, F_k^* si calcolano i valori dei coefficienti ε_n e ε_{6+k} per mezzo delle (38′) (38″), che, coi dati numerici assunti, ora risultano dati dalle

$$\varepsilon_n = 2{,}19325 \int_0^3 (F_n - F_n^*) \cos\left(\frac{n\pi z}{3}\right) dz$$

$$\varepsilon_{6+k} = 2{,}19325 \int_0^3 (F_k - F_k^*) \,\text{sen}\left(\frac{k\pi z}{3}\right) dz .$$

Si è ottenuto:

$\varepsilon_0 = 1{,}34424$; $\varepsilon_1 = 0{,}25518$; $\varepsilon_2 = 0{,}17318$; $\varepsilon_3 = 0{,}16114$; $\varepsilon_4 = 0{,}15921$;
$\varepsilon_5 = 0{,}15728$; $\varepsilon_6 = 0{,}15535$

$\varepsilon_7 = 0{,}67938$; $\varepsilon_8 = 0{,}27054$; $\varepsilon_9 = 0{,}23286$; $\varepsilon_{10} = 0{,}19772$; $\varepsilon_{11} = 0{,}18$;
$\varepsilon_{12} = 0{,}17$.

I coefficienti $\mu_{n,i}$ nel sistema di equazioni (36′) (36″) (Parte I) hanno i valori riportati nella tabella II, e le equazioni determinatrici delle

TABELLA II.

Valori dei coefficienti $\mu_{n,i}$.

1° indice \ 2° indice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	9,86960	0	0	0	0	0	0	4	0	0,14815	0	0,16000	0
1	0	2,46740	0	0	0	0	0	0	1,77778	0	0,28444	0	0,11755
2	0	0	2,46740	0	0	0	0	0,44444	0	1,44000	0	0,22676	0
3	0	0	0	2,46740	0	0	0	0	0,64000	0	1,30612	0	0,19753
4	0	0	0	0	2,46740	0	0	0,01778	0	0,73469	0	1,23457	0
5	0	0	0	0	0	2,46740	0	0	0,03628	0	0,79012	0	1,19008
6	0	0	0	0	0	0	2,46740	0,00326	0	0,04938	0	0,82645	0
7	4	0	0,44444	0	0,01778	0	0,00326	2,46740	0	0	0	0	0
8	0	1,77778	0	0,64000	0	0,03628	0	0	2,46740	0	0	0	0
9	0,14815	0	1,44000	0	0,73469	0	0,04938	0	0	2,46740	0	0	0
10	0	0,28444	0	1,30612	0	0,79012	0	0	0	0	2,46740	0	0
11	0,16000	0	0,22676	0	1,23457	0	0,82645	0	0	0	0	2,46740	0
12	0	0,11755	0	0,19753	0	1,19008	0	0	0	0	0	0	2,46740

costanti A risultano:

$$\begin{cases} 3,36577\, A_0 - 0,82166\, A_2 - 0,15299\, A_4 - 0,06183\, A_6 = 0,21722 \\ 0,82164\, A_0 - 1,52611\, A_2 + 0,54543\, A_4 + 0,10536\, A_6 = 0,10163 \\ 0,15301\, A_0 + 0,54543\, A_2 - 1,63079\, A_4 + 0,42823\, A_6 = 0,00509 \\ 0,06183\, A_0 + 0,10535\, A_2 + 0,42824\, A_4 - 2,18959\, A_6 = -0,08950 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1,14810\, A_1 - 0,62111\, A_3 - 0,17392\, A_5 = 0,02936 \\ 0,62110\, A_1 - 0,59420\, A_3 + 0,52294\, A_5 = 0,02731 \\ 0,17391\, A_1 - 0,52293\, A_3 - 1,63986\, A_5 = -0,00799. \end{cases}$$

I due sistemi risolti dànno:

$$A_0 = 0,57659; \quad A_2 = -0,031776; \quad A_4 = 0,002552; \quad A_6 = 0,041474$$
$$A_1 = 0,022833; \quad A_3 = -0,006525; \quad A_5 = 0,005213.$$

Per le A_{m+k} si ha poi:

$$A_7 = 0,187536; \quad A_9 = 0,107867; \quad A_{11} = 0,056964; \quad A_8 = 0,110043;$$
$$A_{10} = 0,079285; \quad A_{12} = 0,065819.$$

È opportuno osservare che per il significato fisico già indicato nella Parte I per le costanti ε, la S^{**}, in base ai valori ora determinati per le A_n e A_{m+k}, permette di determinare *esattamente* i valori del coefficiente di resistenza di un condotto, per il quale la $\eta(z)\left(1 + \beta B \frac{l_1}{\pi} \theta\right)$ è esprimibile con un polinomio trigonometrico in $\cos n\theta$ e $\operatorname{sen} n\theta$ per n variabile tra 0 e 6.

Determinazione della linea meridiana colle condizioni (*b*) *e* (*c* — 1; *c* — 2)

4. — *Calcoli dei coefficienti H_n e K_k.*

I coefficienti B_n e C_n, definiti dalle (41), hanno ora i valori

$$\begin{aligned} B_0 &= 3,14159\lambda_1 + 4,71239\lambda_2 & C_0 &= 0 \\ B_1 &= -1,90984\lambda_2 & C_1 &= 2\,\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ B_2 &= 0 & C_2 &= -1,5\lambda_2 \\ B_3 &= -0,21220\lambda_2 & C_3 &= 0,66667\lambda_1 + \lambda_2 \\ B_4 &= 0 & C_4 &= -0,75\lambda_2 \\ B_5 &= -0,07639\lambda_2 & C_5 &= 0,4\lambda_1 + 0,6\lambda_2 \\ B_6 &= 0 & C_6 &= -0,5\lambda_2. \end{aligned}$$

I coefficienti c e c' definiti dalle (43), hanno per i valori sopra dati delle A_n i valori:

$$c_0 = 0,881078 \qquad c'_1 = 0,806603$$
$$c_1 = 0,976453 \qquad c'_2 = 0,886518$$

$$c_2 = 1{,}032769 \qquad c'_3 = 0{,}888762$$
$$c_3 = 1{,}006729 \qquad c'_4 = 0{,}918237$$
$$c_4 = 0{,}997368 \qquad c'_5 = 0{,}941256$$
$$c_5 = 0{,}994624 \qquad c'_6 = 0{,}932124$$
$$c_6 = 0{,}957230$$

Infine i coefficienti $b_{r,i}$ e $b_{i,r}$ hanno i valori:

$b_{0,1} = 2$; $b_{0,2} = 1$; $b_{0,3} = 0{,}66667$; $b_{0,4} = 0{,}5$; $b_{0,5} = 0{,}4$; $b_{0,6} = 0{,}3333$; $b_{2,0} = 0$; $b_{2,1} = -0{,}66667$; $b_{2,3} = 1{,}2$; $b_{2,4} = 0{,}66667$; $b_{2,5} = 0{,}47619$; $b_{2,6} = 0{,}375$; $b_{4,0} = 0$; $b_{4,1} = -0{,}13333$; $b_{4,2} = -0{,}33333$; $b_{4,3} = -0{,}85714$; $b_{4,5} = 1{,}11111$; $b_{4,6} = 0{,}6$; $b_{6,0} = 0$; $b_{6,1} = -0{,}05714$; $b_{6,2} = -0{,}125$; $b_{6,3} = -0{,}22222$; $b_{6,4} = -0{,}4$; $b_{6,5} = -0{,}90909$.

$b_{1,0} = 0$; $b_{1,2} = 1{,}3333$; $b_{1,3} = 0{,}75$; $b_{1,4} = 0{,}53333$; $b_{1,5} = 0{,}41667$; $b_{1,6} = 0{,}34286$; $b_{3,0} = 0$; $b_{3,1} = -0{,}25$; $b_{3,2} = -0{,}8$; $b_{3,4} = 1{,}14286$; $b_{3,5} = 0{,}625$; $b_{3,6} = 0{,}44444$; $b_{5,0} = 0$; $b_{5,1} = -0{,}08333$; $b_{5,2} = -0{,}19048$; $b_{5,3} = -0{,}375$; $b_{5,4} = -0{,}88889$; $b_{5,6} = -1{,}09091$.

Dalle (42), procedendo col metodo di successive approssimazioni indicate al n. (8) e limitandosi alla *seconda* approssimazione, si ha:

$$H_0 = 4{,}39371\lambda_1 + 6{,}66966\lambda_2 \qquad K_1 = 2{,}80785\lambda_1 + 4{,}26093\lambda_2$$
$$H_1 = -0{,}17537\lambda_1 - 2{,}45098\lambda_2 \qquad K_2 = -0{,}15688\lambda_1 - 2{,}22738\lambda_2$$
$$H_2 = -0{,}14398\lambda_1 - 0{,}17969\lambda_2 \qquad K_3 = 0{,}84134\lambda_1 + 1{,}31258\lambda_2$$
$$H_3 = 0{,}00904\lambda_1 - 0{,}15068\lambda_2 \qquad K_4 = 0{,}05647\lambda_1 - 1{,}02963\lambda_2$$
$$H_4 = -0{,}07678\lambda_1 - 0{,}12188\lambda_2 \qquad K_5 = 0{,}47491\lambda_1 + 0{,}73521\lambda_2$$
$$H_5 = 0{,}01280\lambda_1 - 0{,}01544\lambda_2 \qquad K_6 = -0{,}02887\lambda_1 - 0{,}66007\lambda_2$$
$$H_6 = -0{,}05075\lambda_1 - 0{,}08660\lambda_2$$

Risulta pertanto

$$\eta_1(z) = \frac{1}{1 + 0{,}25z} + 0{,}12096 - 0{,}00191 \cos\theta + 0{,}00218 \cos 2\theta - 0{,}00003 \cos 3\theta - 0{,}00010 \cos 4\theta + 0{,}00003 \cos 5\theta - 0{,}00100 \cos 6\theta + 0{,}25142 \operatorname{sen}\theta - 0{,}00824 \operatorname{sen} 2\theta + 0{,}04333 \operatorname{sen} 3\theta - 0{,}00214 \operatorname{sen} 4\theta + 0{,}01292 \operatorname{sen} 5\theta - 0{,}00091 \operatorname{sen} 6\theta.$$

$$\eta_2(z) = \frac{z}{1 + 0{,}25z} + 0{,}18362 - 0{,}02672 \cos\theta + 0{,}00273 \cos 2\theta + 0{,}00047 \cos 3\theta - 0{,}00015 \cos 4\theta - 0{,}00004 \cos 5\theta - 0{,}00171 \cos 6\theta + 0{,}38153 \operatorname{sen}\theta - 0{,}11703 \operatorname{sen} 2\theta + 0{,}006760 \operatorname{sen} 3\theta - 0{,}03898 \operatorname{sen} 4\theta + 0{,}02000 \operatorname{sen} 5\theta - 0{,}02074 \operatorname{sen} 6\theta.$$

5. — *Calcolo delle costanti λ e λ_2.*

1° caso: condizione posta alla linea meridiana la sola (*b*) del n. 12.

È $\lambda_2 = 0$; mentre λ_1 risulta

$$\lambda_1 = 0{,}24084 \quad \text{per} \quad B = 1; \quad \beta = 0{,}25$$
$$\lambda_1 = 0{,}14451 \quad \text{per} \quad B = 1{,}6666\,; \quad \beta = 0{,}15\,.$$

Corrispondentemente si calcola:

$$\frac{R - R_1}{BR_1} = \int_0^z \eta(s)ds = 0{,}96336 \log_e (1 + 0{,}25z) + \tag{2}$$

$$+ 0{,}02913z - 0{,}00044 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{3}\right) + 0{,}00025 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi z}{3}\right) - 0{,}00004 \operatorname{sen}(2\pi z) +$$

$$+ 0{,}05782\left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{3}\right)\right] - 0{,}00094\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi z}{3}\right)\right] + 0{,}00332[1 - \cos(\pi z)] -$$

$$- 0{,}00012\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi z}{3}\right)\right] + 0{,}00059\left[1 - \cos\left(\frac{5\pi z}{3}\right)\right] - 0{,}00003[1 - \cos(2\pi z)]$$

per $B = 1$; $\beta = 0{,}25$;

$$\frac{R - R_1}{BR_1} = 0{,}57804 \log_e (1 + 0{,}25z) + 0{,}01748z - 0{,}00027 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{3}\right) + \tag{2'}$$

$$+ 0{,}00015 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi z}{3}\right) - 0{,}00002 \operatorname{sen}(2\pi z) + 0{,}03469\left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{3}\right)\right] -$$

$$- 0{,}00057\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi z}{3}\right)\right] + 0{,}00199[1 - \cos(\pi z)] - 0{,}00007\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi z}{3}\right)\right] +$$

$$+ 0{,}00036\left[1 - \cos\left(\frac{5\pi z}{3}\right)\right] - 0{,}00002[1 - \cos(2\pi z)]$$

per $B = 1{,}666$; $\beta = 0{,}15$.

È utile mettere a raffronto l'equazione della linea meridiana dedotta colla stessa condizione, ma assumendo la formula di Ackeret per la dipendenza della pressione dagli elementi geometrici della linea stessa: in queste considizioni si ottiene:

$$\frac{R - R_1}{BR_1} = 1{,}3402 \log_e (1 + 0{,}25z) \quad \text{per} \quad B = 1 \tag{3}$$

$$\frac{R - R_1}{BR_1} = 0{,}80412 \log_e (1 + 0{,}25z) \quad \text{per} \quad B = 1{,}666. \tag{3'}$$

I valori di $\frac{R - R_I}{BR_I}$ per i vari valori di z, dedotti colle formule (2) e (3) sono dati dalla tabella III e dai diagrammi di fig. 7, mentre quelli corrispondenti alle (2′) e (3′) sono riportati nella tabella IV e nei diagrammi di fig. 8.

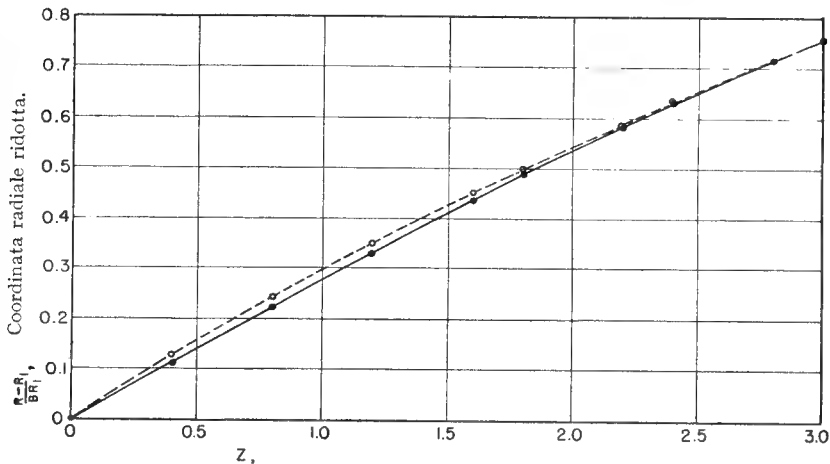



Fig. 7.
Coordinata assiale ridotta lungo l'asse del condotto.

Linea meridiana di minima resistenza per la sola condizione che essa passi per i punti prefissati N_1 e N_2.

$$\beta = 0{,}25.$$

——— linea meridiana ottenuta coll'assunzione che il coefficiente di pressione $\frac{p - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2}$ sia dato dall'equazione (20).

– – – – – linea meridiana ottenuta coll'assunzione che il coefficiente di pressione $\frac{p - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2}$ sia dato dalla formula di Ackeret.

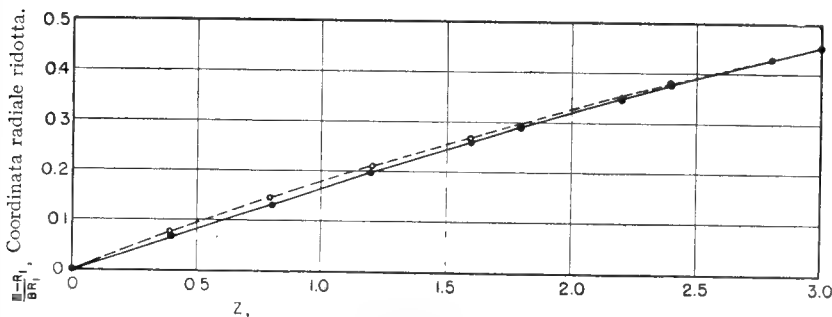



Fig. 8.
Coordinata assiale ridotta.

Linea meridiana di minima resistenza, per la sola condizione che essa passi per i punti prefissati N_1 e N_2.

$$\beta = 0{,}15.$$

——— linea meridiana ottenuta assumendo il coefficiente di pressione $\frac{p - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2}$ dato dalla (20).

– – – – – linea meridiana ottenuta assumendo il coefficiente di pressione dato dalla formula di Ackeret.

TABELLA III.

z	$\frac{R-R_1}{BR_1}$		z	$\frac{R-R_1}{BR_1}$	
	form. (2)	form. (3)		form. (2)	form. (3)
0	0	0	1,8	0,48565	0,49796
0,4	0,11113	0,12773	2,2	0,58181	0,58734
0,8	0,22363	0,24434	2,4	0,62814	0,62989
1,2	0,33155	0,35161	2,8	0,71372	0,71115
1,6	0,43540	0,45094	3	0,75	0,75

TABELLA IV.

z	$\frac{R-R_1}{BR_1}$		z	$\frac{R-R_1}{BR_1}$	
	form. (2')	form. (3')		form. (2')	form. (3')
0	0	0	1,8	0,29133	0,29878
0,4	0,06669	0,07664	2,2	0,34909	0,35241
0,8	0,13418	0,14661	2,4	0,37689	0,37794
1,2	0,19892	0,21097	2,8	0,42825	0,42669
1,6	0,26123	0,27056	3	0,45	0,45

2^o *caso:* si assumono come condizioni poste alla linea meridiana quella già considerata nel caso precedente e l'ulteriore condizione che l'area racchiusa tra la linea stessa e la sua corda N_1N_2 sia nulla.

Le costanti λ_1 e λ_2 debbono soddisfare alle (46) (47), ed essendo per la condizione posta,

$$C = \frac{\beta}{2} \frac{L^2}{B^2 R_1^2}$$

si ottiene per $B = 1$; $\beta = 0,25$

$$3,11405\lambda_1 + 4,37629\lambda_2 = 0,75$$
$$4,96539\lambda_1 + 5,06409\lambda_2 = 1,125$$

da cui

$$\lambda_1 = 0,18879\,; \qquad \lambda_2 = 0,03704;$$

per $B = 1,666...$; $\beta = 0,15$

$$3,11405\lambda_1 + 4,37629\lambda_2 = 0,45$$
$$4,96539\lambda_1 + 5,06409\lambda_2 = 0,675$$

da cui

$$\lambda_1 = 0,11328\,; \qquad \lambda_2 = 0,02222.$$

Corrispondentemente si calcola:

$$(4)\quad \eta(z) = \frac{0{,}18879}{1 + 0{,}25z} + \frac{0{,}03704z}{1 + 0{,}25z} + 0{,}02964 - 0{,}00135 \cos\left(\frac{\pi z}{3}\right) +$$

$$+ 0{,}00051 \cos\left(\frac{2\pi z}{3}\right) + 0{,}00001 \cos(\pi z) - 0{,}00004 \cos\left(\frac{4\pi z}{3}\right) -$$

$$- 0{,}00025 \cos(2\pi z) + 0{,}06160 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{3}\right) - 0{,}00589 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi z}{3}\right) +$$

$$+ 0{,}01068 \operatorname{sen}(\pi z) - 0{,}00185 \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi z}{3}\right) + 0{,}00318 \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi z}{3}\right) -$$

$$- 0{,}00094 \operatorname{sen}(2\pi z)$$

per $B = 1$; $\beta = 0{,}25$;

$$(4')\quad \eta(z) = \frac{0{,}11328}{1 + 0{,}25z} \; \frac{0{,}02222z}{1 + 0{,}25z} + 0{,}01778 - 0{,}00081 \cos\theta +$$

$$+ 0{,}00031 \cos 2\theta + 0{,}00001 \cos 3\theta - 0{,}00001 \cos 4\theta - 0{,}00015 \cos 6\theta +$$

$$+ 0{,}03696 \operatorname{sen}\theta - 0{,}00353 \operatorname{sen} 2\theta + 0{,}00641 \operatorname{sen} 3\theta - 0{,}00111 \operatorname{sen} 4\theta +$$

$$+ 0{,}00191 \operatorname{sen} 5\theta - 0{,}00056 \operatorname{sen} 6\theta$$

per $B = 1{,}666\ldots$; $\beta = 0{,}15$.

Colle formule di Ackeret si ha invece:

$\lambda_1 = 0{,}24999$; $\lambda_2 = 0{,}0625$ per $B = 1$; $\beta = 0{,}25$

$\lambda_1 = 0{,}15$; $\lambda_2 = 0{,}0375$ per $B = 1{,}666\ldots$; $\beta = 0{,}15$

e di conseguenza

$$(5)\quad \eta(z) = \frac{0{,}2499}{1 + 0{,}25z} + 0{,}0625 \frac{z}{1 + 0{,}25z} \quad \text{per } B = 1; \quad \beta = 0{,}25$$

$$(5')\quad \eta(z) = \frac{0{,}15}{1 + 0{,}25z} + 0{,}0375 \frac{z}{1 + 0{,}25z} \quad \text{per } B = 1{,}666\ldots; \quad B = 0{,}15.$$

$B = 1$; $\beta = 0{,}25$. TABELLA V. $B = 1{,}666\ldots$; $\beta = 0{,}15$.

z	$\frac{R - R_1}{BR_1}$		$\frac{R - R_1}{BR_1}$	
	form. (4)	form. (5)	form. (4′)	form. (5′)
0	0	0	0	0
0,4	0,09289	0,1000	0,05575	0,06
0,8	0,19364	0,2	0,11619	0,12
1,2	0,29619	0,3	0,17773	0,18
1,6	0,40021	0,4	0,24013	0,24
1,8	0,45246	0,45	0,27147	0,27
2,2	0,5562	0,55	0,33373	0,33
2,4	0,60785	0,600	0,36470	0,36
2,8	0,70669	0,7	0,42398	0,42
3	0,75	0,75	0,45	0,45

I valori di $\frac{R - R_1}{BR_1}$ per i valori di β e di B sopra considerati e corrispondenti alle (4) (4'), (5) (5') sono dati dalla tabella V e dai diagrammi di fig. (9), (10).

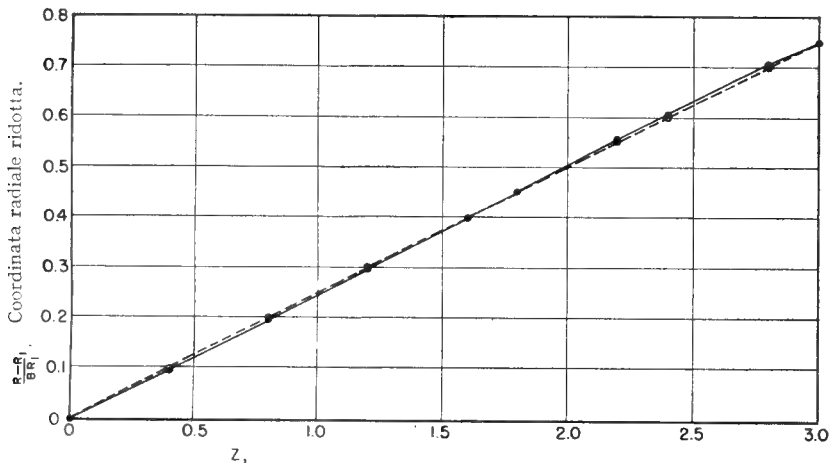



Fig. 9.
Coordinata assiale ridotta.

Linea meridiana di minima resistenza, per la condizione di area compresa tra detta linea e la sua corda nulla. $\beta = 0{,}25$.

——— linea meridiana ottenuta assumendo il coefficiente di pressione $\frac{p - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2}$ dato dalla (20).

– – – – linea meridiana ottenuta assumendo il coefficiente di pressione dato dalla formula di Ackeret.

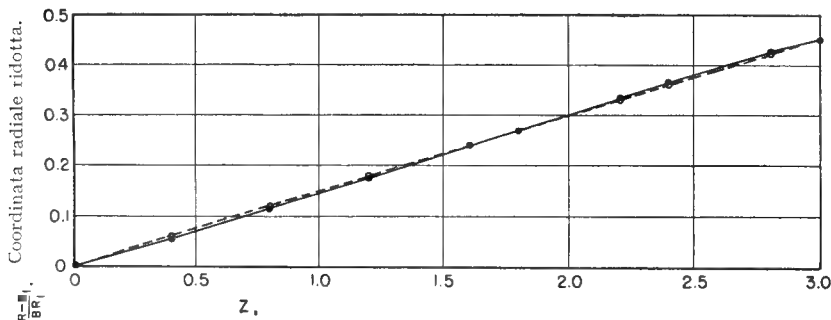



Fig. 10.
Coordinata assiale ridotta.

Linea meridiana di minima resistenza, per la condizione che l'area racchiusa tra essa e la sua corda sia nulla. $\beta = 0{,}15$.

——— linea meridiana ottenuta assumendo il coefficiente di pressione $\frac{p - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2}$ dato dalla (20)

– – – – linea meridiana ottenuta assumendo il coefficiente di pressione dato dalla formula di Ackeret.

3º caso: le condizioni poste alla linea meridiana sono quelle indicate al n. 12, in (b) e in (c; 2). La costante C dell'equazione (47) risulta ora uguale a

$$C = \left(\frac{\beta}{2} + 0{,}0334\right)\frac{L^2}{B^2 R_1{}^2} = \begin{cases} 1{,}4256 & \text{per } B = 1\,; \quad \beta = 0{,}25 \\ 0{,}9756 & \text{per } B = 1{,}666...\,; \quad \beta = 0{,}15 \end{cases}$$

Le costanti λ_1 e λ_2 sono:

$$\lambda_1 = 0{,}40951\,; \quad \lambda_2 = -0{,}12002 \quad \text{per} \quad B = 1\,; \quad \beta = 0{,}25$$
$$\lambda_1 = 0{,}33399\,; \quad \lambda_2 = 0{,}13483 \quad \text{per} \quad B = 1{,}666...\,; \quad \beta = 0{,}15$$

mentre le equazioni delle linee meridiane risultano:

$$\begin{aligned} \frac{R - R_1}{BR_1} &= 3{,}55836 \log_e (1 + 0{,}25z) - 0{,}45258z + 0{,}00231 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{3}\right) + \\ &+ 0{,}00027 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi z}{3}\right) - 0{,}00002 \operatorname{sen}(\pi z) - 0{,}00003 \operatorname{sen}(2\pi z) + \\ &+ 0{,}05459\left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{3}\right)\right] + 0{,}00509\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi z}{3}\right)\right] + \\ &+ 0{,}00306[1 - \cos(\pi z)] + 0{,}00091\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi z}{3}\right)\right] + \\ &+ 0{,}00055\left[1 - \cos\left(\frac{5\pi z}{3}\right)\right] + 0{,}00034[1 - \cos(2\pi z)] \end{aligned} \tag{6}$$

per $B = 1$; $\beta = 0{,}25$,

$$\begin{aligned} \frac{R - R_1}{BR_1} &= 3{,}49324 \log_e (1 + 0{,}25z) - 0{,}52368z + 0{,}00283 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{3}\right) + \\ &+ 0{,}00017 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi z}{3}\right) - 0{,}00002 \operatorname{sen}(\pi z) - 0{,}00002 \operatorname{sen}(2\pi z) + \\ &+ 0{,}03106\left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{3}\right)\right] + 0{,}00622\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi z}{3}\right)\right] + \\ &+ 0{,}00171[1 - \cos(\pi z)] + 0{,}00108\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi z}{3}\right)\right] + \\ &+ 0{,}00031\left[1 - \cos\left(\frac{5\pi z}{3}\right)\right] + 0{,}0004[1 - \cos(2\pi z)] \end{aligned} \tag{6'}$$

per $B = 1{,}666...$; $\beta = 0{,}15$;

alle quali sono da contrapporsi, colle formule di Ackeret, le

$$\frac{R - R_1}{BR_1} = 3{,}85892 \log_e (1 + 0{,}25z) - 0{,}46984z \quad \text{per } B = 1\,; \quad \beta = 0{,}25 \tag{7}$$

$$\frac{R - R_1}{BR_1} = 3{,}85912 \log_e (1 + 0{,}25z) - 0{,}56988z \quad \text{per } B = 1{,}666...\,; \quad \beta = 0{,}15. \tag{7'}$$

La tabella VI e le figure 11, 12 dànno i valori di $\frac{R - R_1}{BR_1}$ in funzione di z corrispondente alle formule sopra indicate.

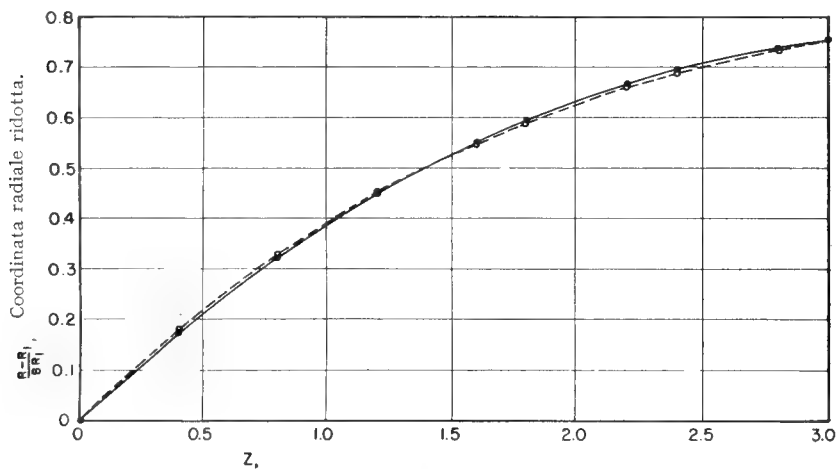



Fig. 11.
Coordinata assiale ridotta.

Linea meridiana di minima resistenza, per la condizione che l'area racchiusa tra detta linea e la sua corda N_1N_2 sia uguale all'area racchiusa tra N_1N_2 e la curva parabolica

$$\frac{R}{R_1} = 1 + \beta \frac{x}{R_1} + 0{,}2 \frac{x}{R_1} - 0{,}2 \frac{x^2}{R_1^2} \frac{R_1}{L} \; ; \qquad \beta = 0{,}25 .$$

——— linea meridiana ottenuta assumendo il coefficiente di pressione $\frac{p - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2}$ dato dalla (20)

– – – – – linea meridiana ottenuta assumendo il coefficiente di pressione dato dalla formula di Ackeret.

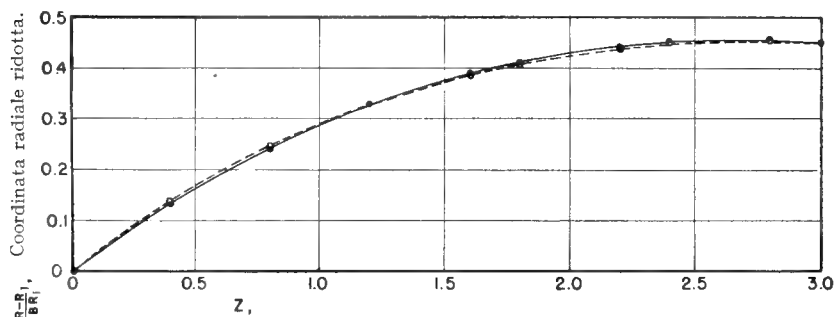



Fig. 12.
Coordinata assiale ridotta lungo l'asse del condotto.

Linea meridiana di minima resistenza, per la condizione che l'area racchiusa tra essa e la sua corda N_1N_2 sia uguale all'area compresa tra detta corda e la curva parabolica

$$\frac{R}{R_1} = 1 + \beta \frac{x}{R_1} + 0{,}2 \frac{x}{R_1} - 0{,}2 \frac{x^2}{R_1^2} \frac{R_1}{L} \; ; \qquad \beta = 0{,}15 .$$

——— contorno della linea meridiana coll'assunzione che $\frac{p - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2}$ sia dato dall'equazione (20).

– – – – – contorno della linea meridiana coll'assunzione che $\frac{p - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2}$ sia calcolabile colla formula di Ackeret.

$B = 1$; $\beta = 0,25$. TABELLA VI. $B = 1,666...$; $\beta = 0,15$.

z	$\frac{R - R_1}{BR_1}$		$\frac{R - R_1}{BR_1}$	
	form. (6)	form. (7)	form. (6′)	form. (7′)
0	0	0	0	0
0,4	0,17018	0,17986	0,13302	0,13986
0,8	0,32078	0,32769	0,24334	0,24769
1,2	0,44614	0,44862	0,32768	0,32862
1,6	0,54943	0,54667	0,38937	0,38667
1,8	0,59279	0,58811	0,41183	0,40811
2,2	0,66482	0,65752	0,44233	0,43752
2,4	0,69395	0,68608	0,45081	0,44607
2,8	0,73666	0,73211	0,45401	0,45210
3	0,75	0,75	0,45	0,45

Determinazione della linea meridiana colle condizioni (b) e (c; 3).

5. — *Calcolo dei coefficienti H_n e K_k.*

Se la condizione posta alla linea meridiana è quella indicata in (c; 3) i coefficienti B_n^* e C_n^* risultano, per le formule date al n. 10 (Parte I):

$$B_0^* = 3,14159\lambda_1 + 5,89049\lambda_2 \qquad C_1^* = 2,0000\lambda_1 + 3,66904\lambda_2$$
$$B_1^* = -2,62603\lambda_2 \qquad C_2^* = -2,06250\lambda_2$$
$$B_2^* = 0,17905\lambda_2 \qquad C_3^* = 0,66667\lambda_1 + 1,35811\lambda_2$$
$$B_3^* = -0,29178\lambda_2 \qquad C_4^* = -1,03125\lambda_2$$
$$B_4^* = 0,04476\lambda_2 \qquad C_5^* = 0,4000\lambda_1 + 0,82135\lambda_2$$
$$B_5^* = -0,10504\lambda_2 \qquad C_6^* = -0,6875\lambda_2.$$
$$B_6^* = 0,01989\lambda_2$$

Posto, come prima:

$$\eta(z) = \eta_1(z)\lambda_1 + \eta_2(z)\lambda_2$$

si trova:

$$\eta_1(z) = \frac{1}{1 + 0,25z} + 0,12096 - 0,00191 \cos\theta + 0,00218 \cos 2\theta +$$
$$+ 0,00003 \cos 3\theta - 0,00009 \cos 4\theta + 0,00003 \cos 5\theta - 0,0010 \cos 6\theta +$$
$$+ 0,25142 \operatorname{sen}\theta - 0,00824 \operatorname{sen} 2\theta + 0,04333 \operatorname{sen} 3\theta - 0,00214 \operatorname{sen} 4\theta +$$
$$+ 0,01292 \operatorname{sen} 5\theta - 0,00091 \operatorname{sen} 6\theta.$$

$$\eta_2(z) = \frac{z(1 + 0,125z)}{1 + 0,25z} + 0,22918 - 0,03635 \cos\theta + 0,00039 \cos 2\theta +$$
$$+ 0,00066 \cos 3\theta - 0,00013 \cos 4\theta - 0,00006 \cos 5\theta - 0,00184 \cos 6\theta +$$
$$+ 0,46764 \operatorname{sen}\theta - 0,15926 \operatorname{sen} 2\theta + 0,09161 \operatorname{sen} 3\theta - 0,05324 \operatorname{sen} 4\theta +$$
$$+ 0,02729 \operatorname{sen} 5\theta - 0,02836 \operatorname{sen} 6\theta.$$

Poichè la costante D dell'equazione (49), per i dati assunti, è definita dalla

$$D = \frac{L^2}{BR_1^2}\left[\frac{\beta}{2} + \frac{0,2}{6} + \left(\frac{\beta^2}{3} + \frac{0,2}{12}\beta\right)\frac{L}{R_1}\right] = \begin{cases} 2,1000 \text{ per } B = 1; & \beta = 0,25 \\ 1,4250 \text{ per } B = 1,666...; & \beta = 0,15 \end{cases}$$

le costanti λ_1 e λ_2 risultano:

$$\lambda_1 = \begin{cases} 0,39351 & \text{per} \quad B = 1; \quad \beta = 0,25 \\ 0,31663 & \text{per} \quad B = 1,666...; \quad \beta = 0,15 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} -0,08768 & \text{per} \quad B = 1; \quad \beta = 0,25 \\ -0,09885 & \text{per} \quad B = 1,666...; \quad \beta = 0,15. \end{cases}$$

Colla formula di Ackeret si ottiene invece:

$$\lambda_1 = \begin{cases} 0,48189 & \text{per} \quad B = 1; \quad \beta = 0,25 \\ 0,37869 & \text{per} \quad B = 1,666...; \quad \beta = 0,15 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} -0,08712 & \text{per} \quad B = 1; \quad \beta = 0,25 \\ -0,1054 & \text{per} \quad B = 1,666...; \quad \beta = 0,15. \end{cases}$$

Le equazioni delle linee meridiane risultano rispettivamente:

per $B = 1$; $\beta = 0,25$

$$(8) \quad \frac{R - R_1}{BR_1} = 2,27548 \log_e (1 + 0,25z) - 0,14786z - 0,02192z^2 + $$
$$+ 0,00233 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{3}\right) + 0,00039 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi z}{3}\right) - 0,00002 \operatorname{sen}(\pi z) -$$
$$- 0,00001 \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi z}{3}\right) - 0,00004 \operatorname{sen}(2\pi z) + 0,05532\left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{3}\right)\right] +$$
$$+ 0,00512\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi z}{3}\right)\right] + 0,00287[1 - \cos(\pi z)] +$$
$$+ 0,00091\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi z}{3}\right)\right] + 0,00051\left[1 - \cos\left(\frac{5\pi z}{3}\right)\right] + 0,00034[1 - \cos(2\pi z)];$$

per $B = 1,666$; $\beta = 0,15$

$$(8') \quad \frac{R - R_1}{BR_1} = 2,05732 \log_e (1 + 0,25z) - 0,18206z - 0,02471z^2 +$$
$$+ 0,00285 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{3}\right) + 0,00031 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi z}{3}\right) - 0,00002 \operatorname{sen}(\pi z) -$$
$$- 0,00002 \operatorname{sen}(2\pi z) + 0,03188\left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{3}\right)\right] + 0,00627\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi z}{3}\right)\right] +$$
$$+ 0,00148[1 - \cos(\pi z)] + 0,00109\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi z}{3}\right)\right] +$$
$$+ 0,00026\left[1 - \cos\left(\frac{5\pi z}{3}\right)\right] + 0,0004[1 - \cos(2\pi z)]$$

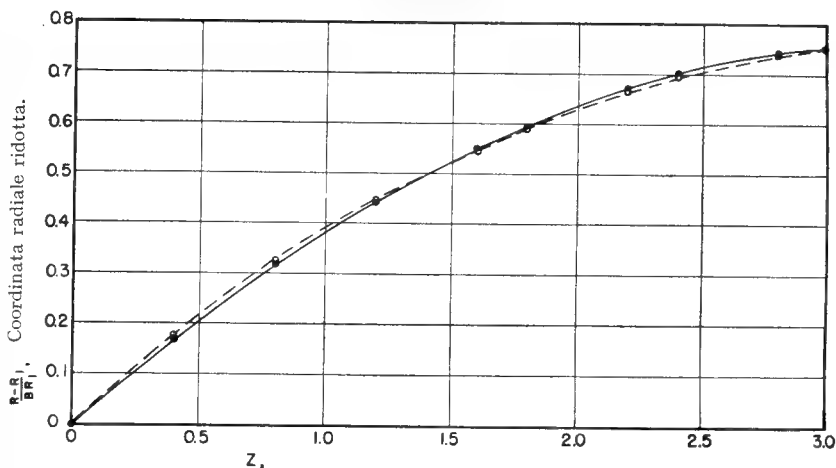



Fig. 13.
Coordinata assiale ridotta lungo l'asse del condotto.

Linea meridiana di minima resistenza, per la condizione che il volume racchiuso tra il solido di rivoluzione, che ha detta linea meridiana, ed il tronco di cono N_1N_2 sia uguale al volume compreso tra questo tronco di cono ed il solido di rotazione la cui linea meridiana è la curva parabolica di equazione

$$\frac{R}{R_1} = 1 + \beta \frac{x}{R_1} + 0{,}2 \frac{x}{R_1} - 0{,}2 \frac{x^2}{R_1^2} \frac{R_1}{L} ; \qquad \beta = 0{,}25 .$$

——— contorno della linea meridiana coll'assunzione che il coefficiente di pressione $\frac{p - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2}$ sia dato dall'equazione (20).

– – – – – contorno della linea meridiana coll'assunzione che il coefficiente di pressione $\frac{p - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2}$ sia dato dalla formula di Ackeret.

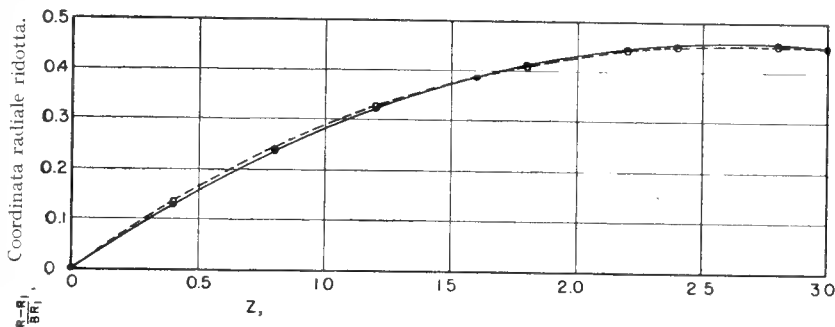



Fig. 14.
Coordinata assiale ridotta lungo l'asse del condotto.

Linea meridiana di minima resistenza, per la condizione che il volume racchiuso tra il solido di rivoluzione avente detta linea meridiana ed il tronco di cono N_1N_2 sia uguale al volume compreso tra questo tronco di cono ed il solido di rivoluzione avente la linea meridiana data dalla curva parabolica di equazione

$$\frac{R}{R_1} = 1 + \beta \frac{x}{R_1} + 0{,}2 \frac{x}{R_1} - 0{,}2 \frac{x^2}{R_1^2} \frac{R_1}{L} ; \qquad \beta = 0{,}15 .$$

——— linea meridiana ottenuta assumendo il coefficiente di pressione $\frac{p - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2}$ dato dalla equazione (20).

– – – – – linea meridiana ottenuta assumendo il coefficiente di pressione $\frac{p - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2}$ dato dalla formula di Ackeret.

mentre colla formula di Ackeret si ha:

per $B = 1$; $\beta = 0{,}25$

$$\frac{R - R_1}{BR_1} = 2{,}62452 \log_e (1 + 0{,}25z) - 0{,}17424z - 0{,}02178z^2 \tag{9}$$

per $B = 1{,}666$; $\beta = 0{,}15$

$$\frac{R - R_1}{BR_1} = 2{,}35796 \log_e (1 + 0{,}25z) - 0{,}2108z - 0{,}02635z^2. \tag{9'}$$

La tabella VII e le figure (13) e (14) dànno i valori di $\frac{R - R_1}{BR_1}$ calcolati colle formule sopra indicate:

$B = 1$; $\beta = 0{,}25$. TABELLA VII. $B = 1{,}666...$; $\beta = 0{,}15$.

z	$\frac{R-R_1}{BR_1}$		$\frac{R-R_1}{BR_1}$	
	form. (8)	form. (9)	form. (8')	form. (9')
0	0	0	0	0
0,4	0,16605	0,17696	0,12883	0,13620
0,8	0,31665	0,32517	0,23903	0,24440
1,2	0,44397	0,44812	0,32567	0,32773
1,6	0,54989	0,54853	0,39032	0,38865
1,8	0,59444	0,59097	0,41411	0,41131
2,2	0,66797	0,66145	0,44625	0,44208
2,4	0,69717	0,68990	0,45474	0,45054
2,8	0,73830	0,73402	0,45596	0,45438
3	0,75	0,75	0,45	0,45

18. — *Conclusioni.*

Dall'esame comparativo delle tabelle sopra date e delle figure corrispondenti, nei vari casi considerati, appare che *sempre* la differenza dei valori di $\frac{R - R_1}{BR_1}$ calcolati assumendo la dipendenza della pressione dagli elementi geometrici della linea meridiana dalla formula (20), oppure assumendo $\frac{p - p_\infty}{\varrho_\infty U_\infty^2}$ secondo la formula di Ackeret per i moti bidimensionali, è *quasi inapprezzabile*. Come è gia stato detto nell'introduzione, questo risultato non è da considerarsi *banale,* perchè in effetto la dipendenza di $\frac{p - p_\infty}{\varrho_\infty U_\infty^2}$ dagli elementi geometrici data dalla (20) è *sensibilmente* diversa

da quella corrispondente alla formula bidimensionale, come appare chiaramente dalla considerazione dei diagrammi delle figure (3) e (4) per i valori di n e di k piccoli. Questo risultato può poi essere interessante in quanto permette la soluzione del problema in modo molto semplice, per quanto si riferisce alla determinazione del *contorno ottimo*, mentre per quanto si riferisce alla determinazione delle pressioni sulla superficie del condotto è opportuno applicare le formule qui ricavate.

EFFETTI D'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA INDUZIONE UNIPOLARE

Memoria del Socio nazionale GIANCARLO VALLAURI
presentata nell'adunanza dell'8 Giugno 1955

Il campo elettrico **E** *ed il campo magnetico* **H** *vengono distinti, a seconda del modo come sono stati prodotti, in campi stazionari e campi d'induzione. Questi ultimi, dovuti al moto del punto considerato rispetto al flusso d'induzione magnetica* **B** *od elettrica* **D**, *in cui esso si trova immerso, sono denominati campo elettromagnetico e campo magnetoelettrico e definiti dalla legge dell'induzione:* $\mathbf{E} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, $\mathbf{H} = \mathbf{D} \wedge \mathbf{v}$. *In base alle attuali conoscenze su la natura del magnetismo delle particelle elementari, il campo magnetico è da considerarsi sostanzialmente, in ogni caso, come campo magnetoelettrico, perchè dovuto a movimento relativo rispetto a cariche elettriche.*

In forza della legge dell'induzione, il valore del campo in un dato punto e quello della differenza di potenziale fra due punti dati, non possono essere definiti univocamente, perchè dipendono dalla velocità **v** *dei punti considerati, rispetto alle varie parti del sistema in esame. Ciò si mette in evidenza nel caso semplice del moto rettilineo e uniforme di un punto o di un corpo di prova, rispetto ad un campo anch'esso uniforme. Ma i fenomeni relativi a codesto caso non si prestano a rilievi sperimentali, nè ad applicazioni. Particolare interesse ha assunto perciò il problema dell'induzione unipolare elettromagnetica, cioè lo studio del campo elettrico prodotto da un magnete permanente cilindrico, cui viene conferito un movimento di carattere assoluto, facendolo ruotare intorno al proprio asse.*

Se si appoggiano sul magnete che ruota due contatti striscianti, collegati con un circuito esterno fermo, si può disporre di una f.e.m. e utilizzarla per trasformare energia meccanica in elettrica. Questo fatto sperimentale, noto da oltre un secolo, è stato oggetto di due interpretazioni, ancor oggi contrastanti, ambedue legate all'idea d'insieme del flusso d'induzione magnetica. Esse consistono nell'ammettere: l'una che il flusso ruoti rigidamente insieme con il magnete, l'altra che esso resti immobile mentre il magnete ruota. Ne consegue la previsione di un campo elettromagnetico solamente esterno nel

primo caso, solamente interno nel secondo, e comunque non solenoidale e non rispondente all'insieme delle proprietà di un capo elettrico.

La via per una corretta interpretazione dell'induzione unipolare elettromagnetica è aperta dalla simmetria fra elettricità e magnetismo, e quindi dal confronto con l'induzione unipolare magnetoelettrica, che si concreta nelle esperienze su di un cilindro rotante di materiale dielettrico, polarizzato assialmente. Tali esperienze hanno dimostrato, che l'azione magnetica della corrente di convezione, così prodotta, equivale a quella di una corrente di conduzione, e che pertanto si possono anche ad essa applicare i risultati delle esperienze di Biot e Savart e la formula di Laplace.

Il legame tra formula di Laplace e legge dell'induzione magnetoelettrica chiarisce che, se si considera il moto di un sistema rigido di cariche rispetto ad un punto, non si può (se non nel caso di moto semplicemente rettilineo ed uniforme) valutare l'effetto d'induzione in base al moto relativo del punto rispetto al campo newtoniano risultante *prodotto dal sistema. Bisogna per contro mettere a calcolo separatamente il campo di ciascuna carica e riconoscere quindi agli effetti d'induzione il carattere di un'azione* granulare.

Per dedurre dal confronto con l'induzione unipolare magnetoelettrica la interpretazione dell'induzione unipolare elettromagnetica, giova servirsi del concetto convenzionale di carica magnetica. Invero qualunque azione esercitata esternamente da una particella magneticamente polarizzata, o in particolare da un singolo vortice elettrico, può essere attribuita all'azione newtoniana di due cariche magnetiche, eguali ed opposte, costituenti un dipolo, equivalente a quella particella o a quel vortice. Ne segue, che l'azione del magnete cilindrico rotante si identifica con quella di due opposte correnti magnetiche, che attraversano la sezione meridiana del cilindro con densità (superficiale e volumetrica) distribuita simmetricamente rispetto al piano equatoriale e rispetto all'asse.

L'azione elettrica di tali correnti è definita dalla legge dell'induzione e quindi anche dall'espressione, che si ottiene per simmetria dalla formula di Laplace, e che esprime il campo elettrico, prodotto dall'elemento di corrente magnetica. Se ne deduce la configurazione solenoidale del campo elettrico d'induzione, prodotto dal magnete rotante all'interno e all'esterno di esso. Tale configurazione, completata con le modificazioni dovute alle conducibilità del magnete ed alle proprietà elettriche di altre parti con esso eventualmente solidali, fornisce una nuova e fondata interpretazione del fenomeno.

1. *Campo elettrico e campo magnetico stazionari.* La nozione di campo elettrico e di campo magnetico, e la definizione dei corrispondenti vettori **E** ed **H**, che ne portano il nome, sono legate alla legge di Coulomb, cioè all'osservazione sperimentale della forza e della coppia, cui sono rispettivamente soggetti un conduttore carico di elettricità ed un ago magnetico, posti nell'intorno del punto considerato.

Tenuto conto delle cause che li producono, i campi **E** ed **H** possono distinguersi in campi stazionari e campi d'induzione.

Il campo elettrico **E** si dice stazionario (o elettrostatico), quando è prodotto da masse elettriche q in riposo rispetto al punto considerato. Il campo magnetico **H** si dice stazionario, quando è prodotto da ipotetiche masse magnetiche m in riposo, ovvero da corrente continua di intensità costante, che circola in conduttori, anch'essi in riposo (cioè aventi forma e posizioni invarianti, rispetto al punto) [1]. L'intensità dei campi stazionari, elettrico o magnetico, prodotti rispettivamente da q o da m, è espressa dalle

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{q}{r^2}\,, \qquad H = \frac{1}{4\pi\mu}\,\frac{m}{r^2}\,, \tag{1}$$

in cui r è la distanza del punto considerato dalla massa agente (supposta concentrata anch'essa in un punto) ed ε e μ sono rispettivamente la permeabilità elettrica e la permeabilità magnetica del mezzo in cui si opera.

Alla definizione coulombiana espressa dalle (1) si collega la definizione energetica, basata su l'energia potenziale contenuta nell'unità di volume dello spazio in cui esiste il campo, ed espressa dalle

$$\frac{dW}{dv} = \frac{1}{2}\,\varepsilon E^2\,, \qquad \frac{dW}{dv} = \frac{1}{2}\,\mu H^2\,. \tag{2}$$

2. *Campo elettrico e campo magnetico d'induzione.* L'esperienza dimostra, che il campo **E** capace di sollecitare una carica, e il campo **H** capace di orientare un magnete, possono anche non essere campi stazionari come sopra definiti, bensì campi d'induzione, dovuti cioè al moto relativo del punto considerato, rispetto al flusso del vettore induzione (magnetica od elettrica) in cui si trova immerso [2]. In base alla definizione di detto vettore, cioè induzione magnetica $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ e induzione elettrica $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, i campi **E** ed **H** prodotti per induzione risultano espressi rispettivamente dalla legge dell'induzione elettromagnetica e da quella dell'induzione magnetoelettrica, cioè dalle

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}\,, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{D} \wedge \mathbf{v}\,, \tag{3}$$

ove **v** è la velocità relativa del punto considerato rispetto al flusso d'induzione in cui esso è immerso, ed i campi **E** ed **H**, non più stazionari, si pos-

---

(1) La definizione di campo magnetico stazionario, generalmente ammessa (K. Küpfmüller, *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*, Springer, Berlin, 1952, p. 171) e qui riportata, può essere oggetto di riesame nel modo indicato più innanzi (§ 11, nota 25).

(2) G. Vallauri, *La legge dell'induzione*, «A. F.», 1953, XXII, p. 211.

sono denominare rispettivamente campo elettromagnetico e campo magneto-elettrico.

La definizione del vettore **v** è conseguenza della solenoidalità dei vettori **B** e **D** e della univoca individuabilità, in funzione del tempo, di un qualunque tubo di flusso d'induzione, dovuto ad una determinata sorgente [3]. Anche alla presenza dei campi d'induzione espressi dalle (3) si accompagna la disponibilità di energia potenziale di polarizzazione, quale è espressa dalle (2).

3. *Molteplicità dei valori di* **E** *e di* **H**. *Polarizzazione del vuoto.* In base alla definizione dei campi d'induzione espressa dalle (3) risulta che, in un dato istante ed in un punto geometricamente definito rispetto ad un dato sistema, sia il vettore **E**, sia il vettore **H** possono assumere valori diversi (cioè risultare non univocamente definiti rispetto ad un sistema di coordinate spazio-temporali), a seconda della velocità di spostamento, che in quell'istante si attribuisce al punto considerato rispetto al sistema induttore, o singolarmente rispetto a ciascuna delle sue parti, se queste sono in moto l'una rispetto all'altra.

Ne segue che, se si considera una porzione di spazio fisico nell'intorno del punto prescelto, anche l'energia potenziale di polarizzazione del vuoto, riferita al volume così definito, è diversa a seconda del movimento che si attribuisce a quel medesimo volume. Ciò vale soltanto per la polarizzazione del vuoto $\varepsilon_0 E$ e $\mu_0 H$, perchè, se è presente anche materia, cioè se nella permeabilità elettrica ε è compresa anche suscettività elettrica ν, ossia $\varepsilon = \varepsilon_0 + \nu$, e nella permeabilità magnetica μ è compresa anche suscettività magnetica χ, ossia $\mu = \mu_0 + \chi$, l'energia unitaria di polarizzazione della materia $\frac{1}{2}\,\nu E^2$ e $\frac{1}{2}\,\chi H^2$ [compresa nei valori espressi dalle (2)] è senz'altro concretamente presente ed univocamente definita, perchè deve essere definito il moto della porzione di materia che si considera, e quindi anche il valore del campo **E** o **H** che agisce su di essa.

La differenza tra polarizzazione del vuoto (spazio libero, etere) $\varepsilon_0 E$ e $\mu_0 H$ e polarizzazione della materia

$$\nu E = P \qquad \text{e} \qquad \chi H = J$$

è confermata dal fatto, che la prima (il cui concetto è necessariamente astratto e in certa guisa convenzionale, al pari di quello della corrispondente energia) non determina una densità di carica $\sigma_e = \varepsilon_0 E$ e $\sigma_m = \mu_0 H$ di fronte alla superficie di separazione, attraverso la quale si passa da campo **E** e **H** a campo nullo, laddove la seconda produce quivi una densità $\sigma_e = P$ e $\sigma_m = J$. Infatti, nel caso esemplificato dalla figura 1 *a*, l'esperienza

(3) Si vedano il § 8 e le note 23 e 25 del lavoro citato nella nota precedente.

dimostra notoriamente, che il campo elettrico prodotto (sia all'esterno, sia all'interno dello spazio occupato da materia) è identico a quello prodotto dal dispositivo della figura 1*b* (e quindi anche la d.d.p. fra due punti, comunque scelti nel sistema, risulta la medesima), quando sia $\sigma_2 = \sigma_1 - \sigma$ essendo $\sigma = P$ per il materiale dielettrico interposto fra le armature nel caso della figura 1 *a* ([4]).

Il tener conto di tutte le cariche, comprese quelle dovute alla polarizzazione della materia, permette di definire il campo, e quindi anche il potenziale newtoniano

$$(4) \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum \frac{q}{r}, \qquad I = \frac{1}{4\pi\mu_0} \sum \frac{m}{r},$$

in funzione della sola costante ε_0, ovvero μ_0, dello spazio libero. D'altro canto tale procedimento è il solo applicabile in qualunque punto di un dominio, in cui varie porzioni di spazio siano occupate (come nel caso della figura 1 *a*) da mezzi di permeabilità diversa.

Fig. 1.
Campo elettrostatico in presenza di dielettrici diversamente polarizzabili.

4. *Moto relativo lineare in campo uniforme.* Il fatto che i vettori **E** ed **H**, in un punto ed in un istante determinato, dipendono dalla velocità attribuita a quel punto rispetto al sistema circostante, impone un criterio di relatività nell'esame dei fenomeni elettromagnetici,

---

([4]) La differenza concettuale tra polarizzazione dello spazio libero (o polarizzazione del vuoto) e polarizzazione della materia induce P. HAMMOND (*A short modern Review of fundamental electromagnetic Theory*, «Proc. I. E. E.», 1954, CI, p. 147) a disapprovare l'uso di tale denominazione per la prima e a non considerare come grandezza fisica la permeabilità del vuoto. Tuttavia il fatto sperimentale, che lo spazio libero è capace di trasmettere energia elettromagnetica, cioè di essere sede di corrente di spostamento (sia elettrica, sia magnetica), induce a conservare, pur con le accennate precisazioni limitative, i concetti e le diciture di polarizzazione, e quindi di permeabilità del vuoto.

Il citato ampio studio di P. Hammond sui fondamenti teorici dell'elettromagnetismo, ispirato a criteri scientifici e anche didattici, è stato esposto in varie sedi della I. E. E. e ha dato luogo ad ampia discussione, sia nelle adunanze, sia per corrispondenza. Su alcuni punti non sono stati ottenuti risultati conclusivi, perchè i pareri sono rimasti sensibilmente discordi, come ha rilevato G. W. O. HOWE (*The Teaching of Electromagnetism*, «Wir. Eng.», 1954, XXXI, p. 253) e come è accennato nella successiva nota 15 del § 8.

impone cioè di tener conto in ogni caso della condizione di moto relativo del punto considerato, rispetto a ciascuna delle sorgenti di flusso.

Un primo esempio di ciò si può schematizzare immaginando un interferro in forma di parallelepipedo rettangolo (fig. 2), avente lunghezza indefinita in direzione *ox* e delimitato da una coppia di poli magnetici N

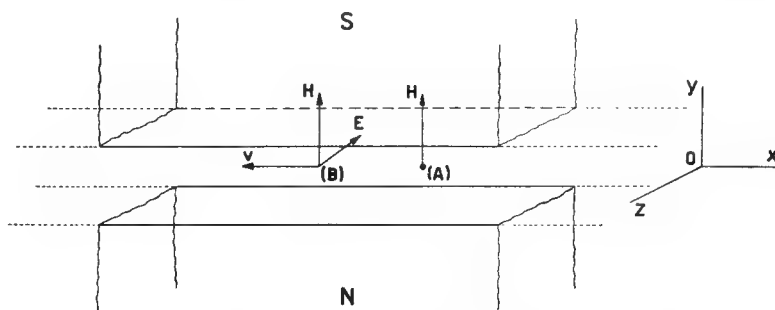



Fig. 2.
Moto relativo lineare rispetto ad un campo magnetico uniforme.

e S, atti a produrre in tutta la porzione mediana della sezione rettangolare un campo **H**, uniforme e costante, in direzione *oy*. Nell'interferro, supposto libero di materia, si considerino due punti, e quindi due osservatori, (A) e (B), animato il primo rispetto al secondo da velocità lineare costante v in direzione *ox*. Si assuma inoltre, che il sistema dei poli sia solidale con uno degli osservatori, ad esempio con (A), e che lo spostamento relativo di (B) si compia quindi in direzione $-ox$. In tali condizioni (A) rileva soltanto l'esistenza di **H**, mentre (B) constata la simultanea presenza di **H** e di $\mathbf{E} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, cioè si trova immerso, oltre che nel campo **H**, in un campo elettrico **E** (in direzione $-oz$), anch'esso uniforme e costante.

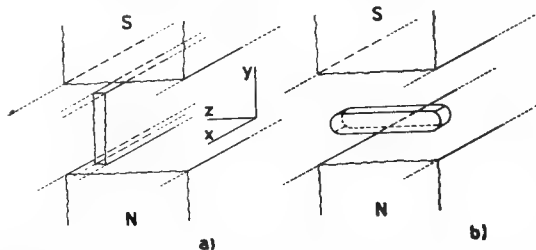



Fig. 3.
Moto lineare di conduttori in un campo magnetico uniforme.

Se ora si suppone ad esempio, di aver collocato nell'interferro una lamina sottile di materiale conduttore non ferromagnetico (fig. 3*a*), anche essa di lunghezza indefinita in direzione dell'asse *ox*, e si immagina la lamina solidale con (A) e quindi anche col sistema magnetico NS, non si separano su di essa cariche elettriche, nè si presenta, per l'osservatore (A), alcun campo elettrico. L'osservatore (B) rileva, come prima, il campo $\mathbf{E} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ in direzione perpendicolare alla lamina (sia all'esterno, sia all'interno di essa, cioè negli spazi intramolecolari, supposto che egli possa

attraversarli con la propria velocità v); ma questo campo, elettromagnetico e non elettrostatico, osservabile soltanto da (B) e invariante dall'interno all'esterno della lamina, non determina, su le facce di essa, la presenza di alcuna carica superficiale.

La carica compare per contro, con densità $\sigma = \varepsilon_0 E$ (senza tener conto dell'effetto degli orli), se la lamina è solidale con (B); essa dà luogo, anche per (A), al corrispondente campo elettrostatico $E = \sigma/\varepsilon_0$, diretto secondo $-oz$ all'esterno e secondo $+oz$ all'interno; e qui fa equilibrio al campo elettromagnetico $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, come è necessario per l'equilibrio delle masse elettriche sul conduttore. Ora, poichè detto campo elettrostatico esterno è solidale con la carica superficiale e quindi con la lamina, esso determina per (A), e quindi anche per il sistema NS solidale con (A), un campo magnetoelettrico $\mathbf{H}_\mathrm{I} = \mathbf{D} \wedge \mathbf{v}$, che ha direzione $-oy$, cioè si oppone al campo $\mathbf{H}$ originario nella misura espressa da

$$\mathbf{H}_\mathrm{I} = -\varepsilon_0 \mu_0 v^2 \mathbf{H} = -\frac{v^2}{c^2}\mathbf{H},$$

ove c = velocità della luce. Se la velocità di spostamento della lamina rispetto al magnete tende al limite c, il campo magnetico risultante $H + H_\mathrm{I}$, e quindi anche il campo elettrico, tendono ad annullarsi, cioè ogni effetto tende a scomparire.

Fig. 4.
Configurazione di un campo elettrico per due osservatori in moto relativo.

Se, in luogo di una lamina indefinita, si immagina di aver posto nell'interferro un conduttore (non ferromagnetico) di dimensioni limitate, per esempio una sbarra allungata nella direzione dell'asse oz (fig. 3*b*), e si suppone che essa sia solidale con (A) e quindi con NS, nessuna carica elettrica compare su la sua superficie e (B) non rileva alcuna perturbazione del campo elettrico, provocata dal passaggio della sbarra. Se per contro questa è solidale con (B), si determina su di essa una separazione di cariche (fig. 4) e la distribuzione di campo elettrico osservata da (B) si conforma nel modo indicato qualitativamente dalla fig. 4*b*. Se (A) è in grado di rilevare, in un dato istante, il campo elettrico intorno alla sbarra, che gli passa dinanzi, ne osserva una configurazione del tipo indicato dalla figura 4*a* (che soddisfa alla condizione di simmetria assiale, se si assimila la sbarra ad un solido di rivoluzione e si ammette $v << c$).

Ne segue che per (A) la sbarra è sede di una f.e.m. (analoga a quella che viene utilizzata nelle sbarre d'indotto di qualunque macchina elet-

trica), per effetto della quale sussiste fra i suoi estremi una d.d.p., che (A) può utilizzare, per breve intervallo, mediante due spazzole, collocate in modo che gli estremi della sbarra debbano venire a contatto con esse, durante il loro passaggio. In ogni punto interno alla sbarra e solidale con essa, il campo risultante **E** (quando la sbarra sia isolata e la velocità relativa v resti costante) è nullo, e quindi nulla la d.d.p. fra una coppia qualunque di punti. Ma la faccia esterna della superficie che delimita il volume occupato dalla sbarra, mentre è equipotenziale per (B), presenta per (A), come si è detto, una distribuzione di potenziale corrispondente al campo della figura 4*a* [5]. Inoltre, per un effetto, che si può chiamare di reazione, analogo a quello sopra considerato nel caso della lamina e tanto più accentuato, quanto più si attenua la diseguaglianza $v < c$, il campo magnetico originario **H** risulta deformato, per l'osservatore (A), nella regione prossima a quella in cui la sbarra sta passando, dal campo magnetoelettrico dovuto al moto delle cariche elettriche portate dalla sbarra medesima, e quindi dal flusso d'induzione elettrica ad esse collegato e avente l'andamento rappresentato nella figura 4*a*.

Molti altri dispositivi, egualmente basati su l'ipotesi di moto relativo rettilineo ed uniforme, si possono ideare [6], considerando ad esempio, in luogo della coppia di poli N e S, una semplice sbarra magnetica di lunghezza indefinita e di sezione rettangolare, magnetizzata uniformemente in direzione normale ad una coppia di facce e nella cui immediata prossimità si trovino gli osservatori (A) e (B); ovvero riferendosi ad altre forme di conduttori, collocati nell'interferro della figura 2, quale ad esempio

---

[5] Quanto si è rilevato all'inizio di questo § circa la molteplicità dei valori del campo, in un medesimo punto ed in un medesimo istante, a seconda della velocità attribuita al punto medesimo rispetto alle varie parti del sistema, vale necessariamente anche per la d.d.p. fra due punti; ed implica altresì una possibile discontinuità del valore del potenziale tra le due facce della superficie, che separa un conduttore da un dielettrico. È quanto si verifica, ad esempio, ai morsetti di qualunque generatore elettromeccanico funzionante a vuoto. Invero, se si trascura il tempo necessario per la separazione e la stabilizzazione delle cariche elettriche, che debbono attuare, in ogni punto dei conduttori costituenti l'avvolgimento, la compensazione, mediante il proprio campo elettrostatico, del campo elettromagnetico (ivi prodotto dal moto rispetto all'induttore o dalla variazione di flusso di quest'ultimo), il campo elettrico risultante nell'interno di tutto l'avvolgimento indotto è nullo, cioè nulla la d.d.p. fra i morsetti, valutata lungo un percorso interno. All'esterno è invece presente la intera d.d.p. che corrisponde alla così detta f.e.m. a vuoto, ed è determinata esclusivamente, in tali condizioni, dal campo elettrostatico delle cariche separatesi su l'avvolgimento, e principalmente di quelle raccolte su la superficie dei conduttori in prossimità dei morsetti. È poi agevole dedurre ciò che accade, quando si chiude il circuito esterno e la macchina prende ad esercitare la sua funzione di generatore.

[6] Se ne trova cenno in qualche trattato, talvolta con esposizione che non apparisce esatta.

una lamina sottile come quella della fig. 2*a*, ma orientata con le facce parallele a quelle dei poli; od ancora sostituendo alla coppia di poli magnetici una coppia di poli elettrici, e così via.

5. *Moto di rotazione uniforme.* Le accennate esperienze ideali, basate su l'ipotesi di moto indefinito, lineare ed uniforme, non possono evidentemente essere attuate in modo concreto. È quindi naturale, che molto interesse sia stato rivolto alla così detta induzione unipolare, cioè ai dispositivi sperimentali, in cui al moto rettilineo viene sostituito il moto di rotazione uniforme intorno ad un asse. Ciò comporta tuttavia un mutamento sostanziale, perchè al moto di rotazione non è applicabile il primo principio di relatività, per effetto del quale, nel caso di due sistemi animati da moto lineare uniforme l'uno rispetto all'altro, è impossibile definire la velocità assoluta di ciascuno dei due, perchè i fenomeni osservati dipendono esclusivamente dalla velocità relativa, cioè dalla differenza fra le due velocità, non dai loro valori assoluti.

Per contro, nel moto di rotazione uniforme di due distinti sistemi intorno ad un asse comune con velocità ω_1 e ω_2, gli effetti rilevabili dagli osservatori (A) e (B), solidali rispettivamente con un sistema e con l'altro, non dipendono soltanto dalla differenza $\omega_1 - \omega_2$, bensì anche singolarmente da ω_1 e da ω_2. Ciò implica che, nel caso in cui si consideri un unico sistema, animato da movimento di rotazione con velocità costante ω intorno ad un dato asse, le azioni elettriche e magnetiche, rilevabili da un osservatore solidale col sistema, non sono indipendenti da ω, e però, come è stato affermato (7), il moto di rotazione è un moto assoluto.

Infatti in un sistema rigido, animato da moto di rotazione con velocità angolare costante ω, sussiste per qualunque coppia di punti la condizione di moto relativo di rotazione dell'uno rispetto all'altro con velocità ω. Ne segue che un osservatore, solidale col sistema, può rilevarne il movimento anche servendosi soltanto di mezzi elettromagnetici (cioè indipendentemente dalle sollecitazioni meccaniche di forza centrifuga e simili). Basta che egli, dopo essersi accertato dell'assenza di campo elettrico e di campo magnetico, separi due cariche elettriche $+q$ e $-q$. Se il sistema è animato da moto lineare uniforme, l'osservatore non può constatare la presenza di un campo magnetico in aggiunta al campo elettrico prodotto dalle due cariche. Per contro, se il sistema è in moto di rotazione uniforme, si determina in esso, in conseguenza della seconda delle (3), anche la presenza di un campo magnetico, il cui rilievo permette di definire, sia l'orientamento dell'asse di rotazione (ma non la sua posizione nel sistema), sia la velocità angolare.

---

(7) G. W. O. Howe, *Rotating Observers*, «Wir. Eng.», 1954, XXXI, p. 223 e 286.

Queste proprietà del moto di rotazione non sono state tenute in conto da molti studiosi, che hanno trattato i problemi dell'induzione unipolare.

6. *Induzione unipolare elettromagnetica.* Lo studio dell'argomento è stato essenzialmente rivolto all'induzione elettromagnetica, anzi che all'induzione magnetoelettrica. Ciò è da attribuirsi al divario di conoscenze e di possibilità in materia di magneti da un lato e di elettreti dall'altro, e all'attitudine dei dispositivi del primo tipo a fornire effetti più rilevanti e più facilmente misurabili ([8]).

Fig. 5.
Generatore omopolare a magnete rotante.

La previsione, ed anche la determinazione sperimentale, degli effetti d'induzione unipolare elettromagnetica, e le ipotesi formulate per interpretarli, formano oggetto di discussione da più di un secolo, cioè fin da quando comparve la descrizione delle mirabili esperienze eseguite da Michael Faraday nel 1831. Il contrasto fra enunciati diversi, ed in particolare fra due interpretazioni contraddittorie, continua ancor oggi, e si è ravvivato negli ultimi tempi, perchè mancano tuttora prove sperimentali o deduzioni teoriche decisive, che ne permettano la discriminazione ([9]).

Si consideri un magnete cilindrico (fig. 5), polarizzato assialmente e suscettibile di girare intorno al proprio asse. All'esterno del magnete le linee di flusso di $\mathbf{H}$ e di $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ sono identiche ed hanno l'andamento tratteggiato in figura. I tubi di flusso di $\mathbf{B}$ continuano nell'interno del magnete e si chiudono solenoidalmente su se stessi. Il campo $\mathbf{H}$ per contro non è solenoidale, subisce la nota discontinuità in corrispondenza della superficie che limita

---

([8]) Ai campi magnetici più intensi di cui si può agevolmente disporre (per esempio $H = 1{,}2 \cdot 10^6$A/m) corrisponde una energia per unità di volume ($9 \cdot 10^5$ joule/m^3) senza confronto maggiore di quella ($4 \cdot 10$ joule/m^3) corrispondente ai più intensi campi elettrici (per esempio $E = 3 \cdot 10^6$ V/m) raggiungibili nei limiti della rigidità dielettrica dell'aria alla pressione ordinaria. A pari velocità di spostamento si ha, in base alle (3), nel primo caso un campo E la cui espressione numerica in V/m è $5{,}7 \cdot 10^4$ volte maggiore di quella, espressa in A/m, del campo H prodotto nel secondo caso.

([9]) La letteratura sui quesiti collegati con i fenomeni dell'induzione unipolare elettromagnetica è vastissima. Si ritiene pertanto opportuno comprendere

il magnete, ed esercita su quest'ultimo un'azione smagnetizzante, equilibrata dall'effetto di magnetizzazione residua dovuto all'isteresi.

La più semplice esperienza su l'induzione unipolare si attua appoggiando sul magnete (costituito da materiale conduttore) due contatti striscianti S_1 ed S_2 (fig. 5) e verificando che, quando si faccia rotare il magnete, con frequenza (numero di giri in 1^s) f, si rende disponibile nel circuito $S_1GS_2MS_1$ (il cui andamento, sia all'esterno, sia nell'interno del magnete, può essere scelto in modo arbitrario, purchè resti invariata la posizione di S_1 e di S_2) una f.e.m. $f\Phi$, essendo Φ il flusso totale di indu-

---

nell'elenco seguente soltanto quei contributi che appaiono particolarmente significativi.

(9.1) M. FARADAY, *Experimental Researches in Electricity*, « Phil. Trans. Roy. Soc. », 1832, Part I, p. 125.

(9.2) IDEM, 1852, Part I, p. 25.

(9.3) PLÜCKER, *Über die Reciprocität der elektromagnetischen und magneto-elektrischen Erscheinungen*, « Pogg. Ann. Phys. u. Ch. », 1852, LXXXVII, p. 352.

(9.4) S. TOLVER PRESTON, *On some electromagnetic Experiments of Faraday and Plücker*, « Phil. Mag. », 1885, XIX-5ª, p. 131.

(9.5) E. LECHER, *Eine Studie über unipolaire Induktion*, « Ann. Phys. u. Ch. », 1895, LIV, p. 276.

(9.6) H. POINCARÉ, *Sur l'induction unipolaire*, « Écl. Él. », 1900, XXIII, p. 41.

(9.7) C. HERING, *An imperfection in the usual Statement of the fundamental Law of electromagnetic Induction*, « Trans. A. I. E. E. », 1908, XXVII, p. 1341. Discussion: T. D. WARING, *ibidem*, p. 1366.

(9.8) S. J. BARNETT, *On electromagnetic Induction and relative Motion*, « Phys. Rev. », 1912, XXXV, p. 323 e 1918, XII-2ª, p. 95.

(9.9) E. H. KENNARD, *Unipolar Induction*, « Phil. Mag. » 1912, XXIII-6ª, p. 937; « Phys. Rev. » 1913, I-2ª, p. 355; « Phil. Mag. », 1917, XXXIII-6ª, p. 179.

(9.10) G. W. O. HOWE, *Some Problems of electromagnetic Induction*, « The El. », 1915, LXXVI, p. 169.

Some electromagnetic Problems, « Proc. I. E. E. », 1950, XCVII-I, p. 129.

Fra gli altri numerosi contributi del Howe sul medesimo argomento sono da ricordare, oltre quelli già citati nelle note 4 e 7, i lavori comparsi in « Wir. Eng. », 1939, XVI, p. 271 e 327; 1954, XXXI, p. 139; 1955, XXXII, p. 1 e 61.

(9.11) G. B. PEGRAM, *Unipolar Induction and Electron Theory*, « Phys. Rev. », 1917, X-2ª, p. 591.

(9.12) W. F. G. SWANN, *Unipolar Induction*, « Phys. Rev. », 1920, XV-2ª, p. 365.

(9.13) F. EMDE, *Zerlegung des magnetischen Bewegungsschwundes*, « El. u. M. », 1934, LII, p. 477.

Quirlende elektrische Felder, « Vieweg u. S. », Braunschweig, 1949 (vedi in particolare p. 53, 72 e seg.).

(9.14) W. CRAMP & E. H. NORGROVE, *Some Investigations on the axial Spin of a Magnet and the Laws of electromagnetic Induction*, « Journ. I. E. E. », 1936, LXXVIII, p. 481.

(9.15) E. G. CULLWICK, *The Fundamentals of Electromagnetism*, « Univ. Press », Cambridge 1949 (vedi in particolare p. 99 e seg.). Per la discussione con G. W. O. Howe (9.10) vedi: « Wir. Eng. », 1954, XXXI, p. 306; 1955, XXXII, p. 28.

zione, che attraversa il cerchio di contatto di S_2. Il fenomeno risulta reversibile, perchè, inserendo in G un generatore che dia luogo al passaggio di una corrente I, si rileva l'azione di una coppia meccanica ΦI fra il circuito esterno $S_1 G S_2$ ed il magnete.

L'interpretazione del risultato dell'esperienza, ed in ispecie la determinazione della parte del circuito $S_1 G S_2 M S_1$, in cui ha sede la f.e.m. $f\Phi$, generata per effetto di induzione elettromagnetica, non è immediatamente deducibile ed è stata infatti proposta in due modi diversi e discordi. Un tentativo di chiarire il problema fu lasciato da parte nello studio precedente ([10]) e viene qui ora ripreso.

7. *Prima interpretazione.* Una prima interpretazione dell'esperienza schematizzata nella figura 5 si basa su l'ipotesi, che i tubi di flusso del vettore induzione, e quindi tutto l'insieme del flusso, siano legati al magnete e ruotino insieme con esso senza subire deformazione alcuna. Ne segue che, per un osservatore solidale col magnete non v'è campo elettrico, nè all'esterno, nè negli spazi intramolecolari del magnete medesimo, laddove, per un osservatore fermo, si ha, dentro e fuori, campo elettrico di induzione. La f.e.m. rilevata ha quindi sede esclusivamente nella parte ferma del circuito, cioè nel tratto esterno $S_1 G S_2$, del quale ogni elemento dl contribuisce in ragione di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \times \mathbf{dl}$ (ove $v = \omega r = 2\pi f r$), così da produrre complessivamente $e = f\Phi$.

Eguale risultato si deduce, se si attua il medesimo moto relativo di rotazione, lasciando fermo il magnete e facendo rotare rigidamente il circuito esterno $S_1 G S_2$ con velocità angolare $-\omega$ intorno all'asse. Se non che, come si è detto, il principio della relatività di movimento non è applicabile ai moti di rotazione; e però, mentre l'interpretazione del fenomeno è evidente nel caso del circuito esterno rotante, essa è discutibile nel caso in cui si faccia rotare il magnete.

Invero, pur tenendo presenti le trasformazioni relativistiche proposte per i moti di rotazione ([11]), non si può non rilevare l'assurdità di una ipotesi, che attribuisce agli elementi di una linea di flusso, concatenata col magnete e posti a distanza sempre maggiore, una velocità di spostamento tendente all'infinito. Ne segue che il campo elettrico indotto varierebbe, in prossimità del piano equatoriale, in ragione inversa del quadrato del raggio, mentre il campo magnetico induttore varia in ragione inversa del cubo, sì che il rapporto tra energia di polarizzazione elettrica ed energia

---

([10]) Vedasi, del lavoro citato nella nota 2, il penultimo capoverso della premessa, p. 214-215.

([11]) M. G. Trocheris, *Electrodynamics of a rotating frame of reference*, « Phil. Mag. », 1949, XL, p. 1143.

di polarizzazione magnetica, immagazzinate in ogni porzione di spazio, tenderebbe all'infinito.

Per di più, pur circoscrivendo l'esame al caso di distanze e di velocità angolari moderate, la proposta interpretazione apparisce inammissibile, se si considera la configurazione del campo elettrico, che l'osservatore fermo dovrebbe rilevare intorno al magnete. Infatti, in base alla prima delle (3), le linee di flusso di **E** debbono intersecare ortogonalmente le linee di flusso di **B** e debbono quindi identificarsi con le tracce delle superficie di livello del campo d'induzione magnetica su di un piano meridiano (linee punteggiate nella fig. 5 e tratteggiate nella fig. 11*a*). Il campo **E** così generato non potrebbe essere solenoidale (in particolare i tubi di flusso di **E** si chiuderebbero su l'asse con sezione nulla) e ciò esigerebbe una distribuzione continua di densità di massa elettrica (ferma) in tutto lo spazio esterno al magnete (rotante). Anche tale conseguenza non è ammissibile, e rende vano il tentativo di rappresentare la distribuzione di potenziale elettrico, che ne deriverebbe nello spazio esterno al magnete.

8. *Seconda interpretazione.* L'altra interpretazione della medesima esperienza è concettualmente reciproca rispetto alla prima e si basa su l'ipotesi, che la f.e.m. $e = f\Phi$, osservata nell'esperienza della figura 5, abbia sede, non già nel circuito esterno fermo, bensì nel magnete rotante. Si afferma a tal fine, che il flusso d'induzione non è legato al magnete, e non partecipa perciò al suo movimento, sì che il campo elettromagnetico **E** espresso dalla prima delle (3) si manifesta in ogni punto della massa del magnete, mentre non compare in alcun punto esterno (fig. 11*b*). Poichè la massa del magnete è conduttrice di elettricità, alla presenza del campo **E** si accompagna una separazione di cariche positive e negative, che si distribuiscono in modo tale da determinare un campo elettrostatico eguale ed opposto al campo elettromagnetico, e da rendere così nullo (a circuito aperto e a velocità di regime) il campo elettrico risultante in ogni punto del conduttore.

È da rilevare che, mentre nel caso del moto lineare uniforme di un conduttore isolato entro un campo **H** uniforme e costante (fig. 3 e 4), si determina sul conduttore medesimo una distribuzione di cariche elettriche esclusivamente superficiale, ciò non si verifica nel caso del moto di rotazione, cui deve accompagnarsi anche una distribuzione volumetrica di carica elettrica. Si consideri infatti, a titolo di esempio; una semplice esperienza, che corrisponde a quanto si attua, con disposizioni costruttive diverse, nelle così dette dinamo omopolari. Si abbia cioè un cilindro di materiale conduttore non magnetico, rotante intorno al proprio asse in un campo magnetico uniforme e costante, orientato anch'esso in direzione assiale (fig. 6). In ogni punto del conduttore si manifesta un campo radiale

d'induzione $E_i = \omega r \mu_0 H$, cui deve fare equilibrio, allo stato di regime, un campo elettrostatico $E_s = -E_i$, prodotto da una opportuna separazione di cariche positive e negative sul conduttore. Tale distribuzione deve consistere in una densità superficiale esterna (positiva nel caso indicato in figura) $\sigma_e = \varepsilon_0 \omega r_e \mu_0 H$, in una densità volumetrica uniforme $\varrho = -2\varepsilon_0 \omega \mu_0 H$ e, se il cilindro è cavo, in una densità superficiale interna $\sigma_i = -\varepsilon_0 \omega r_i \mu_0 H$. Evidentemente la carica complessiva per unità di lunghezza risulta nulla.

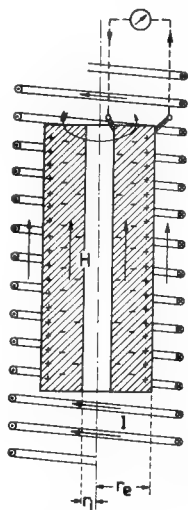



Fig. 6.
Cilindro metallico non magnetico, rotante in un campo uniforme coassiale.

Se si immagina che il cilindro sia di lunghezza indefinita, le cariche distribuite sul rotore non determinano campo elettrostatico all'esterno di esso. Se si ammette che le cariche siano solidali con il rotore, esse danno luogo, nell'interno di esso, ad un campo supplementare H_1 concorde con il campo induttore H e variabile proporzionalmente al quadrato del raggio secondo l'espressione $H_1 = \frac{\omega^2 r^2}{c^2} H$, cioè il rapporto tra il campo supplementare e il campo originario in un dato punto è uguale al quadrato del rapporto fra la velocità lineare di quel punto per effetto della rotazione e la velocità della luce. Infine, se si considera il rotore di una certa lunghezza, la distribuzione delle cariche, prodottasi su di esso, dà luogo ad un campo elettrostatico esterno, ed il dispositivo può funzionare come generatore, alimentando un circuito esterno fermo per mezzo di due spazzole, striscianti rispettivamente su la faccia esterna e su la faccia interna del cilindro (fig. 6) ([12]).

Anche la seconda interpretazione, che riporta il fenomeno dell'induzione unipolare, e quindi il caso della figura 5, all'esperienza schematizzata in figura 6 ed utilizzata nelle dinamo omopolari, non apparisce giustificata, nè accettabile. Gli autori ad essa favorevoli ammettono infatti,

---

([12]) Il dispositivo sperimentale, schematizzato nella fig. 6 ricorda quello ingegnosamente attuato da H. A. Wilson usando, non già un cilindro metallico, bensì un tubo di dielettrico (ebanite), compreso fra due armature metalliche cilindriche, su cui strisciano le spazzole, connesse con un elettrometro a quadranti. Si misura così la d.d.p. corrispondente alla polarizzazione radiale del dielettrico rotante nel campo magnetico. Se per contro le due armature sono connesse così da formare un unico corpo conduttore, l'elettrometro misura la f.e.m. della dinamo omopolare. A pari velocità angolare il rapporto fra la prima e la seconda risulta $\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} = \frac{\nu}{\varepsilon}$, essendo ε e ν rispettivamente la permeabilità e la suscettività del dielettrico usato.

H. A. Wilson, *On the electric effect of rotating a dielectric in a magnetic field*, « Phil. Trans. » A, 1904, CCIV, p. 121.

che il flusso d'induzione resti fermo non soltanto all'esterno, ma anche all'interno del magnete, senza partecipare al moto di rotazione da cui esso è animato. E per giustificare tale preferenza, non muovono all'altra interpretazione le obiezioni sopra accennate, bensì quella di attribuire alle linee di flusso di B una concretezza non plausibile. In verità codesto attributo è identicamente ammesso anche dalla seconda interpretazione, poichè essa postula una definita distribuzione di flusso entro il magnete e le conferisce la proprietà di restare « immobile », mentre il magnete, a cui essa è dovuta, ruota. E giova notare che codesto flusso di B, ritenuto immobile, è risultante dei due flussi opposti di $\mu_0 H$ e di J, e che quest'ultimo esprime appunto la polarizzazione per unità di volume della materia costituente il magnete rotante [13].

In base alla seconda interpretazione l'effetto d'induzione unipolare si manifesta (a vuoto, cioè in assenza del circuito esterno), con la separazione, sul magnete, di due cariche elettriche eguali ed opposte: l'una addensata su la superficie esterna, specie nella zona equatoriale, l'altra distribuita all'interno e sulle facce terminali in prossimità dei poli. Il campo elettrostatico, prodotto da questa distribuzione di cariche, mentre fa equilibrio nell'interno del magnete al campo elettromagnetico $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ e rende uniforme il potenziale del magnete, produce per contro all'esterno una distribuzione di potenziale con differenza finita e costante fra due punti qualunque, la quale raggiunge il valor massimo $f\Phi$ fra due punti fermi e immediatamente prossimi, l'uno all'equatore, l'altro ad uno dei poli [14].

Quando il circuito della figura 5 è chiuso, circola in esso la corrente $I = \dfrac{f\Phi}{R_e + R_i}$, essendo R_e ed R_i le resistenze dei tratti di circuito S_2GS_1 ed S_1MS_2 rispettivamente. La misura della d.d.p. di S_2 rispetto ad S_1, eseguita mediante un circuito voltometrico esterno al magnete e fermo, indica $V_e = R_eI$, e non è dirimente per una scelta fra le due interpretazioni, che la spiegano in modo diverso, ma col medesimo risultato. Tutte le esperienze finora note non forniscono elementi per una scelta decisiva

(13) Un'interpretazione conforme con quella proposta, sarebbe senz'altro plausibile, qualora nel dispositivo della fig. 5 si sostituisse al magnete un cilindro metallico non magnetico, rotante entro un solenoide coassiale, eccitato con corrente continua. Il solenoide può essere, indifferentemente, fermo o rotante; nel primo caso il dispositivo coincide sostanzialmente con quello della figura 6. Vedi loc. cit. nelle note (9.10) e (9.14).

(14) Per un osservatore esterno al magnete e rotante insieme con esso, sussisterebbe, in base alla seconda interpretazione, un campo elettrico d'induzione (non solenoidale), identico a quello previsto dalla prima interpretazione per l'osservatore fermo all'esterno del magnete.

fra le due interpretazioni, cioè per una risposta al quesito: se la sede della f.e.m., nel caso della figura 5, sia nel magnete, ovvero nel circuito esterno ([15]).

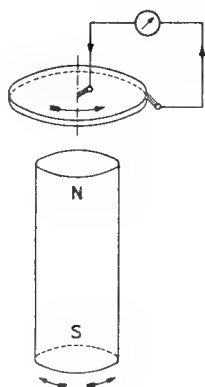



Fig. 7.
Disco di Faraday.

Anche la ben nota esperienza del disco di Faraday (figura 7) non è dirimente, perchè si constata ([9.14]), che la f.e.m. disponibile nel circuito dipende soltanto dalla velocità del disco rispetto al circuito esterno, mentre è affatto indipendente dalla velocità di rotazione (positiva, negativa, nulla) del magnete.

9. *Induzione unipolare magnetoelettrica.* Una nuova interpretazione dei fenomeni d'induzione unipolare elettromagnetica può essere formulata, se si fa riferimento a quelli di induzione unipolare magnetoelettrica e si mette a profitto la già rilevata simmetria tra elettricità e magnetismo ([16]). Tale procedimento conduce altresì a chiarire la interpretazione della formula di Laplace in base alla legge dell'induzione ed a mettere in rilievo la natura, che si potrebbe denominare « granulare », delle azioni esercitate dal campo elettrico e dal campo magnetico.

Le esperienze di induzione unipolare magnetoelettrica non sono state eseguite finora con elettreti permanenti, paragonabili cioè con i magneti permanenti, bensì con materiali dielettrici temporaneamente polarizzati da adatti dispositivi elettrici. Lo schema (fig. 8) dei dispositivi sperimentali usati dal Röntgen e dall'Eichenwald ([17]) comprende ad esempio due anelli metallici a_1 a_2 e un disco di materiale dielettrico d fra essi compreso, il quale può esser messo in rotazione fra gli anelli fermi, ovvero fatto rotare insieme con essi, o tenuto fermo mentre gli anelli ruotano. Se agli anelli si applica, mediante una coppia di spazzole, una d.d.p. costante, si

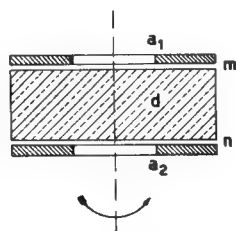



Fig. 8.
Schema del dispositivo sperimentale di Eichenwald.

([15]) La questione è stata considerata finora come controversa. Nella conclusione dell'ampio recente dibattito, svoltosi nelle sedi della I. E. E. e citato nella nota 4, P. Hammond dichiara: « Cullwick e Wilkinson sono sicuri che la sede della f.e.m. è nel circuito esterno, ma io sono ben lungi dal condividere la loro certezza ».

([16]) G. Vallauri, *Induzione elettromagnetica e induzione magnetoelettrica,* « A. F. », 1951, XX, p. 227 e *loc. cit.*, nota 2.

([17]) W. C. Röntgen, *Ueber die durch Bewegung eines in homogenen elektrischen Felde befindlichen Dielektrikums herforgerufene elektrodynamische Kraft,* « Ann. d. Phys. », 1888, XXXV, p. 268 e 1890, XL, p. 93.

A. Eichenwald, *Ueber die magnetischen Wirkungen bewegten Körper in elektrostatischen Feld,* « Ann. d. Phys. », 1903, XI, 4ª, p. 1 e 421.

R. Becker, *Teoria dell'elettricità,* Sansoni, Firenze, 1950, II, p. 303.

rileva con un ago magnetico che, per effetto della rotazione, compare in prossimità degli orli del disco (nelle zone m ed n) un campo magnetico, il quale corrisponde, anche quantitativamente, al campo calcolato in base alla corrente (di convezione) dovuta al moto della densità elettrica superficiale. Infatti, se si indicano con $H_1 H_2 H_3$ i valori rilevati dalle misure di campo, quando si facciano rotare (sempre alla medesima velocità) soltanto gli anelli, o soltanto il disco, o gli uni e l'altro insieme, si constata che

$$H_1 : H_2 : H_3 = \varepsilon : \nu : \varepsilon_0 ,$$

essendo $\varepsilon = \varepsilon_0 + \nu$ la permeabilità dei disco, ν la sua suscettività ed ε_0 la permeabilità del vuoto ([18]).

Codesti risultati, oltre a confermare la classica esperienza del Rowland ([19]), costituiscono, nel caso della rotazione del solo cilindro di dielettrico polarizzato, l'esperienza di induzione unipolare magnetoelettrica simmetricamente analoga a quella dell'induzione unipolare elettromagnetica, considerata nei paragrafi precedenti.

La perfetta analogia dei due casi non ha suggerito finora trattazioni analoghe. Nessun autore, di fronte al fatto sperimentale, che il cilindro di dielettrico polarizzato (elettrete), messo in rotazione, dà luogo ad effetti di campo magnetico nello spazio circostante, ha fatto riferimento al campo elettrostatico legato all'elettrete medesimo, e si è chiesto se esso campo possa considerarsi partecipe o no della rotazione, al fine di applicare poi la legge dell'induzione magnetoelettrica all'esterno, ovvero all'interno del cilindro. Invero la riprova che la corrente di convezione, costituita dal movimento delle cariche solidali con l'elettrete, ha i medesimi effetti delle correnti di conduzione, misurati nelle esperienze di Biot e Savart e tradotti nella formula di Laplace, ha reso superfluo il far ricorso alla legge dell'induzione. Per contro, nel caso del magnete rotante, il concetto, sia pure astratto e convenzionale, di « corrente magnetica », che sarebbe stato suggerito dalla simmetria fra i due casi, non è stato neanche adombrato.

Non sembra inutile un tentativo di trarre profitto dalla simmetria fra magnetismo ed elettricità per formulare una nuova interpretazione dell'induzione unipolare elettromagnetica. A tal fine giova prendere le mosse da un riesame della formula di Laplace.

([18]) Se si accettasse l'ipotesi, che anche la polarizzazione del vuoto (etere) $\varepsilon_0 E$ determini, di fronte al conduttore carico di elettricità la corrispondente densità superficiale $\sigma_0 = \varepsilon_0 E$, l'accennata esperienza sarebbe una conferma della così detta immobilità dell'etere. Si è già rilevato (§ 4) quali limitazioni debbano applicarsi al concetto di polarizzazione del vuoto.

([19]) H. Helmholtz, *Versuche über elektromagnetische Wirkung elektrischer Convection, ausgefürht von H. A. Rowland*, « Ber. Ak. d. Wiss. », Berlin 1876, p. 211.

10. *Formula di Laplace e legge dell'induzione magnetoelettrica.* La formula di Laplace, espressa in forma scalare

$$dH = \frac{I dl}{4\pi r^2} \operatorname{sen} \alpha \tag{5}$$

o in forma vettoriale

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi r^3} (\mathbf{dl} \wedge \mathbf{r}) \,, \tag{5'}$$

può essere interpretata come conseguenza della seconda delle (3), cioè della legge dell'induzione magnetoelettrica $\mathbf{H} = \mathbf{D} \wedge \mathbf{v}$. Infatti, se in A (fig. 9*a*) si trova una carica dq, è presente in B un vettore induzione elettrica $dD = \frac{dq}{4\pi r^2}$ diretto secondo r. Se fra A e B sussiste moto relativo con velocità v, la seconda delle (3) indica la presenza in B di un campo magnetico

$$dH = v \operatorname{sen} \alpha \, dD = \frac{v \operatorname{sen} \alpha \, dq}{4\pi r^2} \,, \tag{3'}$$

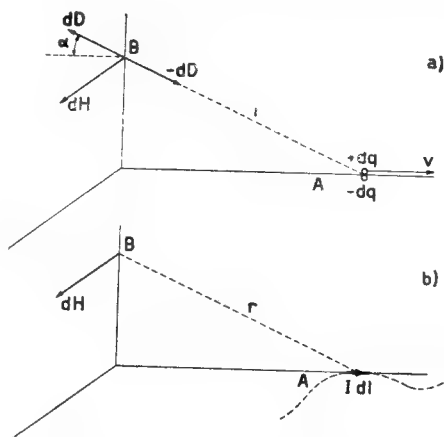



Fig. 9.
Campo magnetico prodotto da una carica in moto o da una corrente.

diretto perpendicolarmente al piano in cui giaciono v ed r. L'espressione di dH permette di dedurre la configurazione del campo magnetico, quale viene rilevato da un osservatore durante il passaggio di una carica elettrica, animata, rispetto ad esso, da velocità v.

La medesima espressione (3') di dH si può far coincidere con la precedente (5), se si applicano le definizioni di velocità $v = \frac{dl}{dt}$ e di intensità di corrente $I = \frac{dq}{dt}$. Ne segue, che il campo dH compare egualmente per effetto della presenza in A (fig. 9*b*) di un elemento dl di circuito, percorso da I, e ciò indipendentemente dalla eventuale velocità di spostamento relativo di dl rispetto a B.

La identificazione della (5) con la (3') è esposta da vari autori [20], ma non pare sia stato messo in rilievo il fatto, che codesta identificazione non è senz'altro giustificata, che cioè, senza un'ipotesi supplementare,

---

[20] Si veda ad esempio la deduzione (basata su la distribuzione della corrente di spostamento dielettrico in tutta la porzione di spazio, in cui la carica elettrica sta transitando) presentata da K. Küpfmüller, *loc. cit.*, nota 1, p. 356. Il medesimo risultato è anche ottenuto da R. Becker, *loc. cit.*, nota 17, p. 47.

la formula di Laplace non si può considerare necessaria conseguenza della legge dell'induzione. Infatti le esperienze di Biot e Savart, e quindi la formula di Laplace, si riferiscono a corrente elettrica nei conduttori, non a movimento di cariche singole. Nel caso della figura 9 si dovrebbe perciò considerare in A la carica dq come posta su un elemento di conduttore di lunghezza dl, in cui sta scorrendo la corrente $I = \frac{dq}{dt}$. Ma, se così è, il campo d'induzione dD, cui si è attribuito il sorgere di dH, non esiste in B, perchè nell'elemento dl di conduttore la carica positiva e quella negativa, pur essendo in moto relativo, si compensano e non dànno quindi luogo (a parte gli effetti della caduta ohmica di potenziale, che possono senz'altro trascurarsi) alla presenza di un campo elettrico esterno.

In altri termini la coincidenza della (3') con la (5), ossia la possibilità di considerare la formula di Laplace come conseguenza della legge dell'induzione magnetoelettrica, implica che il campo magnetico, prodotto in B (fig. 9*a*) dal moto di dq, rimanga invariato, se in A si giustappone a dq una carica $-dq$, che resta ferma rispetto a B. Ne segue che, sebbene nell'istante considerato i campi elettrici prodotti in B da $+dq$ e $-dq$ diano luogo ad un campo risultante nullo, pure deve sorgere in B un campo magnetico, perchè le due sorgenti di quei campi elettrici sono animate da moto relativo. Risulta pertanto che, mentre i due campi elettrici si compensano, la loro azione magneticamente induttiva rimane distinta, e produce così un campo magnetico per effetto del moto relativo delle due sorgenti l'una rispetto all'altra. Ciò impone di considerare separatamente l'effetto delle due cariche, e suggerisce e giustifica l'attribuzione di un carattere «granulare» all'azione magnetica delle cariche elettriche in moto ([21]).

In base al principio ora esposto diventa possibile interpretare e prevedere tutte le azioni elettromagnetiche e magnetoelettriche come conseguenze della legge dell'induzione. Si consideri ad esempio una corona di cariche elementari $+dq$ distribuite uniformemente su un cerchio (fig. 10), così da costituire una carica complessiva $+q$; e si faccia rotare la corona con frequenza f. In base a quanto esposto, cioè in base al concetto di azione granulare, si può considerare affatto indifferente, agli scopi della previsione di effetti magnetici, *per un osservatore fermo*, la presenza o l'assenza di un'altra corona immediatamente contigua, ma ferma, recante una carica $-q$, ossia anche la presenza o l'assenza, in tutto lo spazio considerato, del campo elettrostatico risultante dovuto a q. Presente o

([21]) Il concetto dell'azione granulare fu esposto da W. F. G. SWANN fin dal 1920 nello studio di cui alla nota ([9.12]); ma non è stato finora messo a profitto per chiarire la dipendenza della formula di Laplace dalla legge dell'induzione e per presentare una nuova interpretazione dell'induzione unipolare.

assente la carica $-q$ ferma, il campo magnetico H prodotto dalla q rotante è il medesimo (identico a quello dovuto ad una intensità di corrente $I = f \cdot q$).

Anche qui sarebbe erroneo (ed equivarrebbe alla « prima interpretazione », esposta nel § 7) determinare dapprima per ciascun punto il campo E risultante per effetto della presenza di q, dedurne $D = \varepsilon E$, valutare la velocità dovuta alla rotazione di q e applicare la seconda delle (3) per ricavare H. In tal modo non si spiegherebbe la comparsa di H, quando sia presente anche la carica complementare $-q$ ferma e si commetterebbe (come nella prima interpretazione) l'errore di prevedere una distribuzione non solenoidale di H, con valore nullo su l'asse e variabile linearmente in funzione di $\frac{1}{r}$ a grande distanza sul piano equatoriale. In base al concetto di azione granulare si deve invece considerare separatamente l'azione di ciascuna carica dq (fig. 10), valutare, attraverso i corrispondenti valori di v e di dD, il valore di dH che ne deriva, e dedurne poi la risultante H di tutti i dH (che corrisponde per ogni punto al ben noto valore del campo prodotto da una corrente circolare).

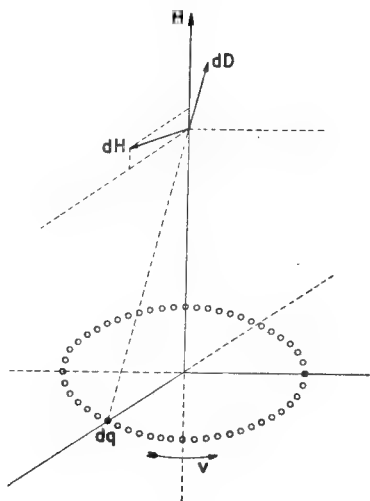



Fig. 10.
Campo di una carica elettrica distribuita su una corona circolare rotante.

Come si è detto, l'azione magnetica della corona rotante q è indipendente dalla presenza o assenza della corona ferma $-q$ *per un osservatore fermo*. Ma nel caso di un osservatore mobile (per esempio rotante intorno al medesimo asse con velocità angolare eguale o diversa da quella di q) il campo magnetico, a cui esso si trova soggetto, è diverso nei due casi. Nel caso della presenza della corona ferma $-q$ il campo H è indipendente dal moto dell'osservatore (perchè questo si muove in campo elettrico nullo) e dipende soltanto dalla sua posizione rispetto al cerchio, dal valore di q e dalla frequenza f di rotazione relativa di q rispetto a $-q$, identicamente a quanto avverrebbe se si sostituisse al sistema delle due corone un circuito percorso da corrente $I = fq$. Se invece è presente soltanto la corona rotante q, l'osservatore in moto è soggetto ad un campo magnetico d'induzione, che risulta da due componenti, di cui l'una è quella predetta e l'altra è dovuta al movimento dell'osservatore rispetto al campo elettrico risultante (e quindi fermo), prodotto dall'insieme della carica q.

11. *Cariche e correnti magnetiche. Formula di Laplace per l'induzione elettromagnetica.* I concetti ora esposti e le formule che ne derivano suggeriscono di mettere a profitto, per interpretare l'induzione unipolare elettromagnetica, la mirabile simmetria fra elettricità e magnetismo. Apparisce strano che il tentativo non sia stato finora compiuto, probabilmente a cagione della difficoltà e, si può forse dire, della repugnanza ad usare i concetti di carica magnetica e di corrente magnetica (di convezione).

Le attuali conoscenze in materia di elettrofisica escludono l'esistenza concreta e separata di cariche magnetiche, ossia di quantità di magnetismo [22], e fanno quindi considerare in ogni caso il campo magnetico H come definito dalla seconda delle (3), cioè come campo magnetoelettrico (dovuto esclusivamente a moto di masse elettriche). Tuttavia i grandi vantaggi, non soltanto didattici, sì anche concettuali ed orientativi per l'attività di ricerca, che possono trarsi dalla ricordata simmetria, pongono il quesito, se convenga escludere l'idea, sia pure idea affatto convenzionale, di una massa magnetica m (omogenea col flusso d'induzione magnetica Φ), quale figura nella seconda delle (4) sopra riportate e quale è suggerita dalle classiche esperienze di Coulomb [23].

Si consideri un volume elementare $dl \cdot ds$ di materiale magnetico, polarizzato nella direzione della lunghezza dl che è normale alla sezione ds. Si può attribuire a quell'elemento la natura di un vortice elettrico (costituito da elettroni che frullano su se stessi o che ruotano su orbite) [24], equivalente al vortice di una carica dq che percorre il contorno di ds con frequenza (numero di giri in 1^s) f. Il campo magnetico, da esso prodotto nello spazio esterno al volume $dl \cdot ds$, è identico, in base al principio di equivalenza, a quello di un magnete elementare di momento magnetico $dM = \mu_0 f dq ds$, cui corrisponde un'intensità di magnetizzazione $J = \frac{\mu_0 f dq}{dl}$. Considerare il vortice di corrente elettrica $f dq$ contenuto nel volume $dl \cdot ds$,

---

[22] Su la presunta esistenza e su la separabilità di ipotetiche masse magnetiche vedasi *loc. cit.*, nota 16 ed in particolare il § 3 e le note 3 e 4.

[23] Anche di recente vari studiosi si sono espressi in favore dell'uso, sia del concetto, sia della valutazione quantitativa di massa magnetica (o polo magnetico).

Si veda P. HAMMOND, *loc. cit.*, nota 4 ed anche G. DARRIEUS, *Champ et induction magnétiques*, « Bull. Soc. Fr. El. », 1954, IV, 7ª, p. 381.

Per contro P. MOON e D. EBERLE SPENCER (*Electromagnetism without magnetism: an historical sketch*, « Am. Jour. of Physics », 1954, XXII, p. 120) affermano che « l'intero concetto di campo magnetico è una finzione » e propongono di « formulare una elettrodinamica completamente libera da tale concetto ».

[24] F. BRAILSFORD, *Ferromagnetic Theory* nel volume: *Magnetic Alloys and Ferrites*, London, G. Newnes, 1954, p. 1.

ovvero considerare due masse magnetiche coulombiane $\pm\, dm = J ds = = \frac{\mu_0 J dq}{dl} ds$, distanti fra loro di dl e costituenti un magnete elementare di momento $dM = dm \cdot dl = \mu_0 J dq ds$, significa applicare due modi concettualmente identici, e quindi del tutto equivalenti, per l'esame degli effetti che si producono all'esterno del vortice. Il fare riferimento alle masse magnetiche, come mezzo per studiare un campo magnetico all'esterno delle particelle magnetizzate (cioè anche negli spazi intramolecolari tra le particelle medesime) è quindi pienamente giustificato; e riesce d'altro canto molto vantaggioso, perchè consente di dedurre la configurazione del campo, in base alla distribuzione delle masse, per mezzo della legge di Coulomb ([25]).

Ne segue che, nella previsione del campo elettromagnetico prodotto dalla rotazione del magnete (fig. 5), è indifferente considerare quest'ultimo carico di una distribuzione di masse coulombiane, ovvero costituito da innumerevoli solenoidi infinitesimi opportunamente orientati, di cui ciascuno è percorso da corrente elettrica di appropriata intensità. Trattare il quesito con riferimento alle masse magnetiche offre il vantaggio di poter applicare anche alla prima delle (3) la medesima trasformazione, con cui dalla seconda è stata ottenuta (§ 10) la (3′), e di ricavare così la

$$dE = v \operatorname{sen} \alpha \, dB = \frac{v \operatorname{sen} \alpha \, dm}{4\pi r^2} . \tag{3''}$$

Se ora si introduce la definizione convenzionale di intensità di corrente magnetica (di convezione) $V = \frac{dm}{dt}$ (espressa in $\frac{\text{weber}}{\text{secondo}}$, cioè in volt), si deduce dalla prima delle (3) l'espressione simmetrica alla formula di Laplace (5) e (5′), cioè

$$dE = \frac{V dl}{4\pi r^2} \operatorname{sen} \alpha \tag{6}$$

$$d\mathbf{E} = \frac{V}{4\pi r^3} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{dl}) , \tag{6'}$$

che si può convenzionalmente denominare formula di Laplace per le correnti magnetiche (di convezione).

La simmetria concettuale e formale si completa deducendo dalle precedenti la legge di circuitazione, cioè l'integrale lineare di E (e rispettivamente di H) lungo una linea chiusa, concatenata con una corrente

([25]) L'adozione, sia pure convenzionale, del concetto di massa magnetica giustifica la distinzione fra campo magnetico stazionario e campo magnetico d'induzione (campo magnetoelettrico) di cui nei §§ 1 e 2. A rigore, come si è rilevato, ogni campo magnetico è in ultima analisi magnetoelettrico ed anche la predetta distinzione ha carattere convenzionale. Vedi nota 1.

magnetica V (e rispettivamente elettrica I):

$$\oint E dl = - V \, , \qquad \oint H dl = I \, . \tag{7}$$

Qui la I può essere corrente di conduzione, o di convezione, o di spostamento. Analogamente la V può essere attribuita a movimento di cariche magnetiche convenzionali o a corrente di spostamento magnetico, e risulta quindi esprimibile in ambedue i casi da $\frac{d\Phi}{dt}$ (Φ = flusso d'induzione magnetica = carica magnetica = m). La prima delle (7) si identifica così con l'altra ben nota espressione della legge dell'induzione $e = -\frac{d\Phi}{dt}$.

12. *Nuova interpretazione.* L'esame del fenomeno dell'induzione unipolare elettromagnetica (fig. 5), cioè dell'effetto prodotto dal moto dei singoli vortici elettrici presenti nel magnete o delle equivalenti cariche magnetiche in esso distribuite, deve essere compiuto su la base della legge dell'induzione con l'aiuto di una delle formulazioni equivalenti sopra riportate. Ciò consente di precisare una nuova interpretazione del fenomeno, che esclude le altre due finora seguite, e risulta pienamente plausibile.

Se il magnete della figura 5 è polarizzato nella direzione dell'asse, con simmetria rispetto all'asse medesimo e al piano equatoriale, anche la distribuzione di carica magnetica convenzionale presenta analoga simmetria, e la densità di essa risulta uniforme su ciascun cerchio, avente il proprio centro sul'asse di rotazione e giacente su di un piano ad esso normale. Ne segue che, quando il magnete è in rotazione, ciascuno di codesti cerchi costituisce un filetto elementare di corrente magnetica di convezione. Il campo elettrico, prodotto dall'insieme di tali correnti magnetiche, è valutabile in base alla (6) ed il suo andamento qualitativo (fig. 11*c*) è facilmente deducibile, se si tiene presente la simmetria del fenomeno con quello del campo magnetico prodotto da correnti elettriche circolari.

A scopo di confronto è indicato nella figura 11, rispettivamente in *a* e in *b*, quale sarebbe l'andamento delle linee di flusso del vettore **E**, se si accettasse la prima, ovvero la seconda interpretazione. Nel primo caso il campo d'induzione si manifesterebbe all'esterno del magnete e sarebbe rilevabile da un osservatore fermo; nel secondo caso agirebbe su la materia costituente il magnete e sarebbe rilevabile soltanto da un osservatore in moto. In ambedue i casi non avrebbe distribuzione solenoidale. Per contro, in base alla nuova interpretazione, il campo è solenoidale e si estende così all'esterno, come all'interno del magnete. La f.e.m. disponibile nel circuito elettrico schematizzato nella figura 5 è in ogni caso $f\Phi$, ma, mentre essa sorgerebbe per *a* nel solo tratto esterno e per *b* nel solo tratto interno, la sua sede nel caso *c* si estende ad ambedue le parti.

Come si è detto, il fare ricorso al concetto convenzionale di carica magnetica non infirma in alcun modo le deduzioni che se ne possono trarre, se si tengono presenti i limiti della convenzione adottata. Invero un magnete cilindrico di lunghezza l e sezione s, magnetizzato uniformemente con intensità J, cioè recante su le due facce terminali una densità di carica magnetica $\sigma = J$ e quindi una carica σs, è affatto equivalente, nelle azioni esterne, ad un fascio di innumerevoli e sottilissimi solenoidi paralleli di lunghezza l, aderenti l'uno all'altro nel volume occupato dal magnete,

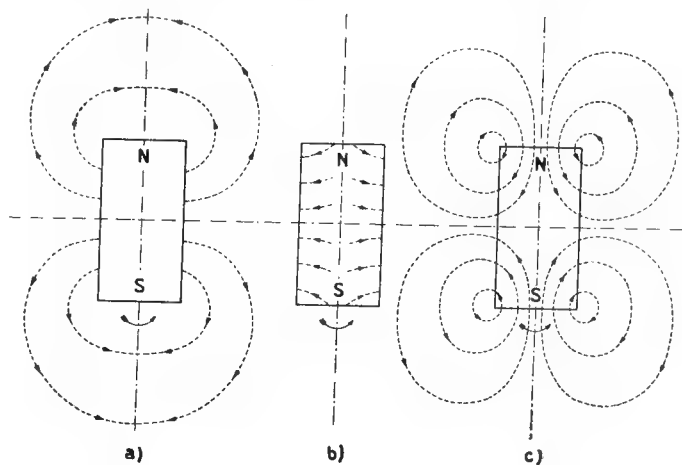



Fig. 11.
Configurazione del campo elettrico generato dal magnete rotante.

costituiti ciascuno da N spire (il cui avvolgimento occupi uno spessore trascurabile in confronto con la sezione del rispettivo solenoide) e percorsi da intensità di corrente $I = \frac{l}{N} \cdot \frac{J}{\mu_0}$. I solenoidi possono anche essere più sottili, così da lasciare intercapedini non trascurabili in confronto con la loro sezione e da occupare quindi complessivamente un'area αs ($\alpha < 1$), purchè siano percorsi da intensità di corrente $I_1 = \frac{I}{\alpha}$. Se si compie l'esperienza ideale di far rotare intorno al proprio asse con frequenza f quel fascio rigido di solenoidi, percorsi ciascuno dalla corrente I ovvero I_1, si rileva, da parte di un osservatore fermo, la presenza, sia all'esterno, sia nelle intercapedini fra i singoli solenoidi, del medesimo campo elettrico prodotto dal magnete (esteso anch'esso, così all'esterno, come alle intercapedini fra le particelle di materia che lo costituiscono), quale è rappresentato dalla figura 11*c*.

Questa esperienza ideale conferma il principio dell'azione *granulare* nell'effetto d'induzione, perchè, se si sostituisce al magnete, non più il

fascio di innumerevoli solenoidi elementari, bensì un unico solenoide di lunghezza l, sezione s, e numero di spire N, percorso dalla corrente I, si ha ancora all'esterno il medesimo campo magnetico prodotto dal magnete equivalente, ma, facendo rotare il solenoide su se stesso, non si riscontra la presenza del campo elettrico d'induzione.

Per completare l'esame del fenomeno secondo la nuova interpretazione giova ora considerare gli effetti del campo elettrico d'induzione sul materiale di cui è composto il magnete. Se le linee di flusso del vettore E indicate nella figura 11*c* rappresentassero il campo elettrico agente sul magnete, sarebbe agevole tracciare nella sezione meridiana di esso (ed eventualmente di altre parti metalliche con esso solidali) linee chiuse, lungo le quali agirebbe una f.e.m. non nulla; sì che il materiale conduttore dovrebbe diventar sede di correnti parassite. Ma la previsione sarebbe errata, perchè in realtà il campo elettrico d'induzione, agente su ogni particella costituente il magnete, o di altro materiale solidale con esso, non è quello prima dedotto per un osservatore fermo, ma deve ora essere valutato con riferimento ad un osservatore, rotante insieme col magnete.

Vale qui, simmetricamente, la distinzione fra osservatore fermo e osservatore rotante, esposta nella seconda parte del § 10 con riferimento all'esperienza ideale della fig. 10. Ne segue che, per qualunque punto esterno od interno al magnete, ma rotante solidalmente con esso, il campo elettrico d'induzione risulta da due componenti, che si possono dedurre separatamente, mediante la scomposizione della velocità relativa (del punto considerato rispetto a ciascuna carica elementare inducente) nella velocità propria della carica e nella velocità propria del punto. La prima delle due componenti di **E** è quella già prima dedotta in base alla (6) per l'osservatore fermo, la seconda è quella espressa dalla prima delle (3) e dovuta al moto dell'osservatore rispetto al campo newtoniano delle cariche, supposte ferme. L'integrale lineare della prima componente lungo un qualunque contorno chiuso è espresso da $-\frac{d\Phi}{dt}$, essendo $\frac{d\Phi}{dt}$ la variazione del flusso nell'unità di tempo (ossia la intensità della corrente magnetica) attraverso qualsiasi superficie bilatere, delimitata dal contorno prescelto e supposta ferma. L'analogo integrale lineare, riferito alla seconda componente e alla medesima superficie, supposta ora rigidamente solidale col magnete, risulta espresso da $+\frac{d\Phi}{dt}$. Perciò il campo risultante ha ovunque, per l'osservatore solidale col magnete, rotore nullo, e non può quindi provocare corrente in una massa conduttrice.

Il vettore risultante **E**, pur essendo irrotazionale, presenta valori finiti e variabili da punto a punto, perchè le sue due componenti non si elidono reciprocamente e dànno quindi luogo, per l'osservatore rotante.

ed in ogni punto del materiale costituente il magnete o solidale con esso, ad un campo risultante. Si può infatti rilevare, a titolo di esempio, che su l'asse del magnete si presenta soltanto la prima componente, perchè la seconda è nulla, e che su l'equatore le due componenti sono in opposizione, con sensibile prevalenza della seconda su la prima. Ne segue che, se il magnete è costituito da materiale conduttore (od anche da materiale dielettrico con permeabilità ε diversa da ε_0), deve determinarsi su di esso una separazione di cariche elettriche (con distribuzione superficiale e volumetrica), il cui campo elettrostatico si sovrappone al campo d'induzione, così da dar luogo, per l'osservatore solidale col magnete, ad un campo risultante nullo nell'interno di esso, se il materiale è conduttore (o ad un campo E_r legato alla induzione elettrica D dalla relazione $\varepsilon E_r = D$, se il materiale è dielettrico di permeabilità ε) ([26]).

Si deduce così, in base ad un'ipotesi su la distribuzione della magnetizzazione J nel magnete (e conseguentemente delle convenzionali cariche magnetiche), che in un magnete cilindrico rotante, dotato di conducibilità elettrica e isolato, il campo d'induzione tende a separare le due cariche elettriche di segno opposto, accumulando l'una di preferenza nella parte interna del magnete, l'altra nella parte superficiale o prossima alla superficie, specialmente verso la parete cilindrica e verso la parte centrale delle basi. (Nel caso della figura 11*c* si tratta rispettivamente della carica + e della carica —). All'esterno del magnete il campo elettrostatico dovuto a tali cariche si sovrappone, invariato anche per l'osservatore fermo, a quello d'induzione prima dedotto; ma, a causa del modo come sono distribuite le cariche (di cui l'una è disposta così da abbracciare più o meno completamente l'altra) e della loro modesta entità, l'effetto esterno non modifica sensibilmente il campo elettrico d'induzione.

Il tener conto dell'effetto supplementare ora esposto (e di quello di secondo grado, dovuto all'azione magnetica delle cariche, separatesi sul

---

([26]) Se si assimila il globo terrestre ad un magnete sferico di raggio $6{,}37 \cdot 10^6$ m, magnetizzato uniformemente con intensità $9{,}3 \cdot 10^{-5}$ Wb/m² e rotante con frequenza $1{,}16 \cdot 10^{-6}$ Hz intorno al proprio asse magnetico, si può calcolare il campo elettrico d'induzione, osservabile ad esempio al polo e all'equatore. Si constata così, che il campo d'induzione ha valore affatto trascurabile in confronto col gradiente di potenziale rilevato negli studi di fisica terrestre e dovuto evidentemente a cause di altra natura. Infatti questo gradiente, soggetto a variazioni sia periodiche sia accidentali, è valutato, indipendentemente dalla latitudine, su una grandezza del l'ordine di 125 V/m, con direzione *verso il suolo*. Per contro il campo d'induzione, calcolato nel modo ora detto, risulta al polo (ove è dovuto soltanto alla « prima componente » ed è diretto *verso l'alto*) valutabile in $1{,}7 \cdot 10^{-2}$ V/m. All'equatore, ove le due componenti sono dirette la « prima » verso il suolo, la « seconda » verso l'alto, esse presentano ambedue ordine di grandezza analogo alla precedente, sì che la loro risultante è ancora notevolmente più piccola.

magnete e rotanti con esso) inquadra e completa la proposta interpretazione dei fenomeni di induzione unipolare elettromagnetica. Essi risultano pienamente conformi con le leggi dell'elettromagnetismo e consentono altresì, mediante il principio dell'azione granulare, di affinarne la conoscenza.

Torino, *Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris.*

G. VALLAURI

EFFETS D'INDUCTION ÉLECTRO-MAGNÉTIQUE INDUCTION UNIPOLAIRE

Le champ électrique **E** et le champ magnétique **H** son appelés, selon la façon dont ils ont été produits, champs stationnaires et champs d'induction. Ces derniers sont dûs au mouvement du point considéré par rapport au flux d'induction magnétique **B** ou électrique **D** dans lequel ce point se trouve. Ils sont dénommés champ électro-magnétique et champ magnéto-électrique et sont définis par la loi de l'induction: $\mathbf{E} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, $\mathbf{H} = \mathbf{D} \wedge \mathbf{v}$. D'après les connaissances actuelles sur la nature du magnétisme des particules élémentaires, le champ magnétique doit être considéré essentiellement, en tous les cas, comme un champ magnéto-électrique dû au mouvement relatif du point considéré par rapport à des charges électriques.

D'après les lois de l'induction, la valeur du champ en un point donné et celle de la différence de potentiel entre deux points ne peuvent pas être définies de façon univoque parce qu'elles dépendent de la vitesse **v** des points considérés par rapport aux différentes parties du système envisagé. Ceci peut être mis en évidence dans le cas simple du mouvement rectiligne et uniforme d'un point ou d'un corps dans un champ également uniforme.

Mais les phénomènes relatifs à ce dernier cas ne se prêtent pas à des preuves expérimentales ni à des applications. Pour cette raison, un intérêt particulier a été attaché au problème de l'induction unipolaire électro-magnétique, c'est-à-dire à l'étude du champ électrique produit par un aimant permanent cylindrique, auquel on donne un mouvement de caractère absolu en le faisant tourner autour de son axe.

Si on appuie sur l'aimant tournant deux contacts glissants, reliés à un circuit extérieur immobile, on peut disposer ainsi d'une force électromotrice qu'on utilisera pour transformer de l'énergie mécanique en énergie électrique. Ce fait expérimental, connu depuis un siècle, a fait l'objet de deux interprétations qui aujourd'hui encore sont en contradiction, les deux étant liées à l'idée d'ensemble du flux d'induction magnétique. La première hypothèse admet que le flux tourne de façon solidaire avec l'aimant; la deuxième qu'il reste immobile pendant la rotation de l'aimant. Il s'ensuit la prévision d'un champ électro-magnétique uniquement extérieur dans le premier cas et uniquement intérieur dans le

deuxième, et, de toute façon, non solénoïdal et ne répondant pas à l'ensemble des propriétés d'un champ électrique.

La voie pour une interprétation correcte de l'induction unipolaire électro-magnétique est ouverte par la symétrie entre électricité et magnétisme et, par conséquent, par la comparaison avec l'induction unipolaire magnéto-électrique, cette dernière pouvant être concrétisée par les expériences sur un cylindre tournant en matériau diélectrique, polarisé axialement. De telles expériences ont montré que l'action magnétique du courant de convection ainsi produite est équivalente à celle d'un courant de conduction: il s'ensuit qu'on peut appliquer à celle-ci les résultats des expériences de Biot et Savart et la formule de Laplace.

La liaison entre formule de Laplace et loi de l'induction magnéto-électrique établit que, si l'on considère le mouvement d'un système rigide de charges par rapport à un point, on ne peut pas (sauf dans le cas du mouvement simple rectiligne et uniforme) évaluer l'effet d'induction sur la base du mouvement relatif du point par rapport au champ newtonien *résultant* produit par le système. Il faut au contraire calculer séparément le champ de chaque charge et donc admettre pour les effets d'induction une action de nature *granulaire*.

Afin de déduire de la comparaison avec l'induction unipolaire magnéto-électrique une interprétation de l'induction unipolaire électro-magnétique, on a intérêt à utiliser la notion conventionnelle de charge magnétique. En effet, n'importe quelle action extérieure produite par une particule polarisée magnétiquement ou, en particulier, par un tourbillon électrique, peut être attribuée à l'action newtonienne de deux charges magnétiques, égales et opposées, constituant un dipole équivalent à la particule magnétique ou au tourbillon.

Il s'ensuit que l'action de l'aimant cylindrique tournant peut être identifiée avec celle de deux courants magnétiques opposés, traversant la section méridienne du cylindre avec une densité (superficielle et cubique) distribuée de façon symétrique par rapport au plan équatorial et par rapport à l'axe. L'action électrique de tels courant est définie par la loi de l'induction et donc aussi par l'expression que l'on peut obtenir, par symétrie, de la formule de Laplace et qui exprime le champ électrique produit par l'élément de courant magnétique.

On peut en déduire la configuration solénoïdale du champ électrique d'induction produit par l'aimant tournant à l'intérieur et à l'extérieur de celui-ci. Une telle configuration, complétée par les modifications dues à la conductibilité de l'aimant et éventuellement aux propriétés électriques d'autres corps qui lui sont solidaires, fournit une interprétation nouvelle et fondée du phénomène.

G. Vallauri

EFFECTS OF ELECTROMAGNETIC INDUCTION UNIPOLAR INDUCTION

The electric field **E** and the magnetic field **H** are distinguished, depending upon the way in which they are produced, as stationary and induction fields. The latter are due to movement of a point with respect to the flux of magnetic induction **B** or the flux of electric induction **D**, in which the point is immersed,

and are called electromagnetic and magnetoelectric fields. They are defined by the induction law $\mathbf{E} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, $\mathbf{H} = \mathbf{D} \wedge \mathbf{v}$. On the basis of the present knowledge of the nature of magnetism of elementary particles, the magnetic field must be considered in every case as a magnetoelectric field, because it is due to a relative movement with respect to electric charges.

As a consequence of the induction law, the value of the field at a certain point and the value of the potential difference between two given points can not be univocally defined, because they both depend upon the velocity $\mathbf{v}$ of the points considered with respect to the different parts of the system. This may be clearly shown in the simple case of rectilinear and uniform motion of one point or of one test body, with respect to a field which is also uniform. But the phenomena related to this case are not very suitable for experimental test or for applications. Therefore of particular interest is the problem of unipolar electromagnetic induction, that is, the study of the electric field produced by a cilindrical permanent magnet rotating around its own axis.

If two sliding contacts connected with an external steady circuit lean on the rotating magnet, it is possible to get an E.M.F. and to use it for transforming mechanical energy into electrical energy. This experimental result, known for more than one century, was subjected to two interpretations. Both are related to the general idea of the flux of magnetic induction and are still in use today. One of them assumes that the flux rotates rigidly together with the magnet, the other one that the flux remains immovable when the magnet rotates. From this there follows the existance of an electromagnetic field, which is only external in the first case, and only internal in the second one, and which in both cases, is not solenoidal and does not have all the usual properties of an electric field.

The starting point for a correct interpretation of unipolar electromagnetic induction is given by the symmetry between electricity and magnetism and therefore by comparison with unipolar magnetoelectric induction, which appears in experiments on a rotating cylinder of dielectric material, polarized along the axis. These experiments have proved that the magnetic effect of the convention current produced in this way, is equivalent to the action of a conduction current and that therefore it is possible to apply to this effect the results of Biot and Savart's experiments and of Laplace's formula.

The relation between Laplace's formula and the magnetoelectric induction law points out that, if we consider the motion of a rigid system of charges with respect to a point, we can not (with the exception of the case of simple rectilinear and uniform motion) evaluate the effect of induction on the basis of the relative motion of the point with respect to the *resulting* newtonian field produced by the system. On the contrary we must separately calculate the field of each charge and therefore attribute to the effects of induction the character of a *granular* action.

In order to derive the interpretation of electromagnetic unipolar induction by comparison with magnetoeletric unipolar induction, it is helpful to use the fictitious concept of magnetic charge. In fact, any action externally produced by a magnetically polarized particle and in particular by a single electric vortex,

may be attributed to the newtonian action of two equal and opposite magnetic charges, forming a dipole which is equivalent to that particle or vortex. It follows that the action od a rotating cylindrical magnet is identical with the action of two opposite magnetic currents, passing through the meridian cross section of the cylinder with (surface and volume) density symmetrically distributed with respect to the equatorial plane and to the axis.

The electric effect of such currents is defined by the induction law and therefore also by the expression obtained from Laplace's formula (by symmetry), which gives the electric field produced by the magnetic current element. From this is derived the solenoidal configuration of the induction eletric field, produced inside and outside of the rotating magnet by the magnet itself. Such a configuration, together with the modifications due to the conductivity of the magnet and to the electric properties of other parts which may be rigidly connected with it, gives a new and logical interpretation of the unipolar induction.

G. Vallauri

WIRKUNGEN DER ELEKTROMAGNETISCHEN INDUKTION UNIPOLARE INDUKTION

Das elektrische Feld **E** und das magnetische Feld **H** werden, je nach der Art ihrer Erzeugung, als stationäre bzw. Induktions-Felder bezeichnet. Diese letzeren, die von der Bewegung des gegebenen Punktes gegenüber dem Fluss der magnetischen Induktion **B** oder der elektrischen Induktion **D** herrühren, werden elektromagnetisches und magneto-elektrisches Feld genannt und sind durch das Induktionsgesetz $\mathbf{E} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, $\mathbf{H} = \mathbf{D} \wedge \mathbf{v}$ bestimmt. Auf Grund der gegenwärtigen Kenntnisse über die Natur des Magnetismus der Elementarteilchen, muss das magnetische Feld immer als magneto-elektrisches Feld betrachtet werden, weil es durch eine gegenüber elektrischen Ladungen relative Bewegung erzeugt wird.

Infolge des Induktionsgesetzes können die Grösse des Feldes in einem gegebenen Punkt und der Potentialdifferenzen zwischen zwei gegebenen Punkte nicht eindeutig definiert werden, weil sie von der Geschwindigkeit **v** der Punkte gegenüber den verschiedenen Teilen des betrachteten Systems abhängen. Dies kann im einfachen Fall einer geradlinigen und gleichförmigen Bewegung eines Punktes oder eines Probekörpers in einem homogenen Feld gezeigt werden. Aber die durch diese Bedingungen hervorgerufenen Phänomena sind für experimentelle Prüfungen oder Anwendungen nicht geeignet. Deshalb ist das Problem der unipolaren elektromagnetischen Induktion, d. h. das Studium des von einem zylindrischen, um seine Axe rotierenden permanenten Magneten erzeugten elektrischen Feldes, von besonderem Interesse.

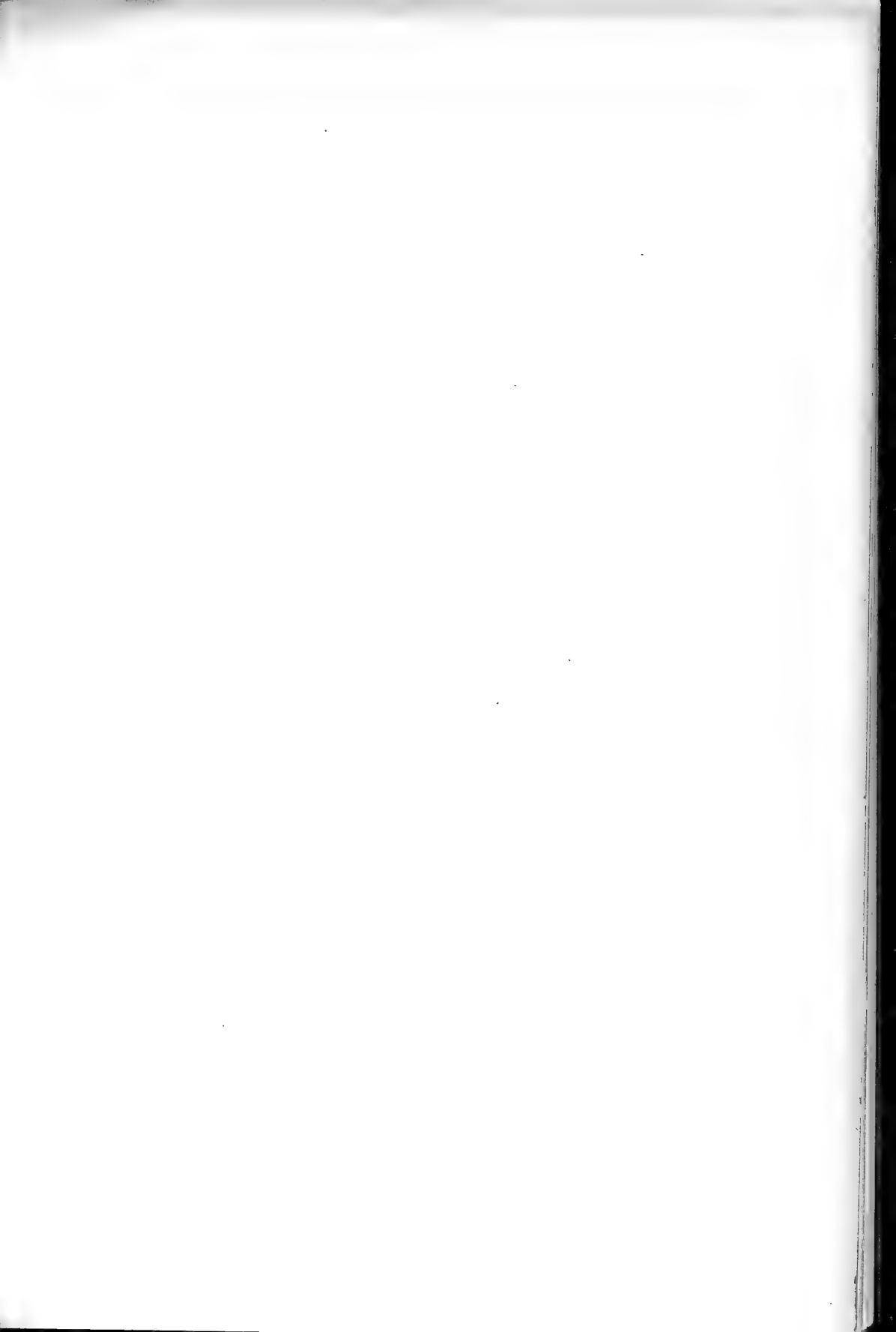
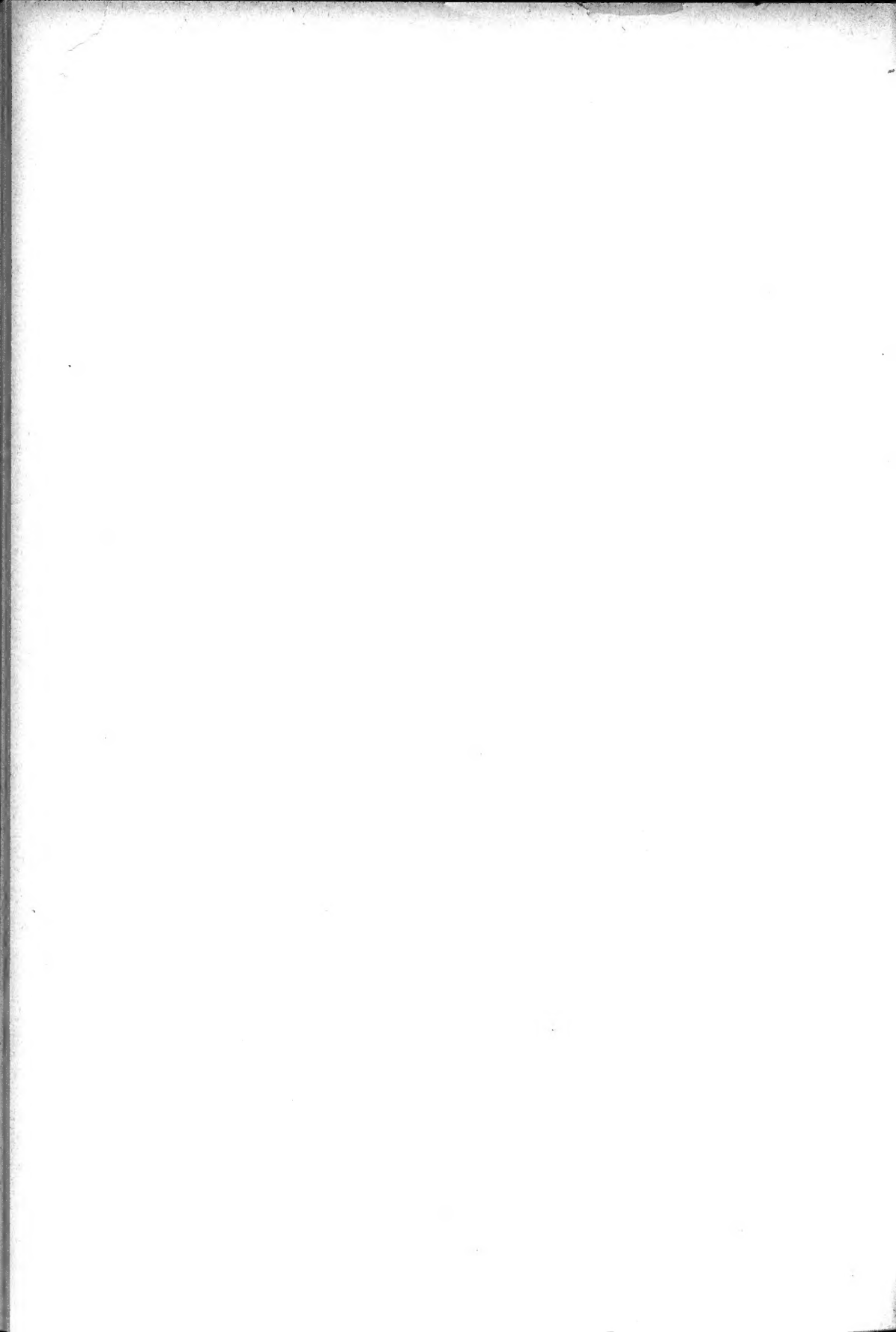
Wenn zwei, mit einem äusseren festen Stromkreis verbundene Gleitkontakte auf den rotierenden Magnet aufgesetzt werden, erhält man eine E.M.K., und das System kann zur Umwandlung von mechanischer in elektrische Energie benutzt werden. Für diese seit mehr als einem Jahrhundert bekannte Tatsache, wurden zwei, noch heute sich entgegenstehende Erklärungen gegeben, die beide

mit dem allgemeinen Begriff des magnetischen Induktionsflusses verbunden sind. Die eine Erklärung nimmt an, dass der Fluss starr verbunden mit dem Magnet mitrotiert, die andere dass der Fluss whärend der Drehung des Magnets unbeweglich bleibt. Daraus folgt ein, im ersten Fall nur äusseres, im zweiten Fall nur inneres elektromagnetisches Feld, das in beiden Fällen jedoch nicht divergenzfrei ist und nicht die üblichen Eigenschaften eines elektrischen Feldes hat.

Die Symmetrie zwischen Elektrizität und Magnetismus und auf Grund dieser der Vergleich der unipolaren elektromagnetischen Induktion mit der unipolaren magneto-elektrischen Induktion, die in Versuchen mit einem längs der Achse polarisierten, rotierenden Zylinder aus dielektrischem Stoff auftritt, bahnt den Weg zur Interpretation der unipolaren elektromagnetischen Induktion. Diese Versuche bewiesen, dass die magnetische Wirkung eines so erzeugten Konvektionsstroms derjenigen eines Leitungsstroms gleichwertig ist, und das man deswegen das magnetische Feld aus dem Biot-Savartschen Gesetz und der Laplaceschen Gleichung berechnen kann.

Der Zusammenhang zwischen Laplacescher Gleichung und magneto-elektrischem Induktionsgesetze zeigt, dass man die Induktionswirkung, die durch Bewegung eines starres Systems von Ladungen gegenüber einem Raumpunkt entsteht, nicht (mit Ausnahme geradliniger gleichförmiger Bewegungen) auf Grund der relativer Bewegung des Punktes gegenüber dem resultierenden, vom System erzeugten Newtonschen Feld bestimmen kann. Dagegen muss man das Feld jeder Ladung einzeln berechnen und deshalb den Induktionswirkungen den Charakter einer körnigen Wirkung nachschreiben.

Es empfiehlt sich den konventionellen Begriff von fiktiven magnetischen Ladungen zu benutzen, um durch Vergleich mit der unipolaren magneto--elektrischen Induktion die Erklärung der unipolaren elektromagnetischen Induktion herzuleiten. Und zwar kann man irgendwelche, von einem magnetisch polarisierten Teilchen, insbesondere von einem einzelnen elektrischen Wirbel, im Aussenraum erzeugte Wirkung, als eine Folge der Newtonschen Wirkung von zwei gleichen, entgegengesetzten magnetischen Ladungen, die einen jenem Teilchen oder Wirbel gleichwertigen Dipol bilden, betrachten. Deswegen kann die Wirkung des rotierenden zylindrischen Magnets mit derjenigen von zwei entgegengesetzten magnetischen Strömen identifiziert werden, die durch den Meridian-Querschmitt des Zylinders fliessen, und zwar mit gegenüber der äquatorialen Fläche und der Achse symmetrisch verteilten (Flächen- und Volumen-) Dichten.

Die elektrische Wirkung von solchen Strömen wird durch das Induktionsgesetz bestimmt und ist deshalb ebenfalls (aus Symmetriegründen) durch die Laplacesche Gleichung gegeben. Man erhält durch dieses Vorgehen das elektrische Feld, erzeugt durch ein magnetisches Stromelement. Daraus folgt die divergenzfreie Verteilung des vom drehenden Magneten aussen und innen erzeugten elektrischen Induktionsfeldes. Eine solche Feldverteilung, modifiziert durch Abhänderungen infolge der elektrischen Leitfähigkeit des Magnets und der elektrischen Eigenschaften von anderen mit ihm eventuell starr verbundenen Teilen, gibt eine neue und logische Erklärung der Frage der unipolaren Induktion.

MEMORIE

DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

MEMORIE DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
1759-1952

Tomi 1-112 divisi nelle seguenti:
Serie I Tomi 1-40; Serie II Tomi 1-71; Serie III Tomo 1

---

[1] Miscellanea philosophico-mathematica Societatis privatae Taurinensis. Tomus I: 1759.

[2-5] Mélanges de Philosophie et de Mathématique de la Société Royale de Turin pour les années 1760-61 [e [3] 1762-1765; [4] 1766-1769; [5] 1770-1773]. *Senza data.*

[6-10] Mémoires de l'Académie royale des Sciences. Années 1784-1785 [-1790-91]: 1786-93.

[6] 1784-85: *Première partie:* 1786;
[7] *Seconde partie:* 1786.
[8] 1786-87: 1788.
[9] 1788-89: 1790.
[10] 1790-91: 1793.

[11] Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin. Années 1792 à 1800. Tome VI: 1801·

[12] Mémoires de l'Académie des Sciences, Lettres et Beaux-Arts de Turin pour les années X et XI [1803-1804]. Sciences physiques et mathématiques. *Première partie:* An. XII [1803-4].

[13] [Gli stessi, *Seconde partie*]. Littérature et Beaux-Arts: 1803.

[14-15] Mémoires de l'Académie impériale des Sciences, Lettres et Beaux-Arts pour les années XII et XIII [1803-05]: 1805.

[14] *Sciences physiques et mathématiques:* 1805.
[15] *Lettres et Beaux-Arts:* 1805.

[16-21] [Gli stessi] pour les années 1805-08 [e 1809-10, 1811-12]: 1809-13.

[16] 1805-08 *Sciences physiques et mathématiques:* 1809.
[17] *Lettres et Beaux-Arts:* 1809.
[18] 1809-10 *Sciences physiques et mathématiques:* 1811.
[19] 1809-10 *Lettres et Beaux-Arts:* 1811.
[20] 1811-12 *Sciences physiques et mathématiques:* 1813.
[21] *Lettres et Beaux-Arts:* 1813.

[22] Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Turin pour les années 1813-14. Tome XXII: 1816.
(Diviso in due parti, ognuna con propria numerazione).

[23-40] Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino. Tomo XXIII [-XL]: 1818-38.
(Divise in due parti, ognuna con numerazione propria, ed intitolate: (I) *Memorie della Classe di Scienze fisiche e matematiche*, e (II) *Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche*).

[41-111] Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino. Serie II, Tomo 1 [-71]: 1839-1952.
Sino al Tomo 67 divise come i tomi 23-40 della prima serie; dal Tomo 68 divise in *Parte prima*: Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, e *Parte seconda*: Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

[112] Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino. Serie terza. Tomo 1, diviso come nella serie prec. (tt. 68 ss.):
Parte I: Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (in corso di stampa);
Parte II: Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: 1952.